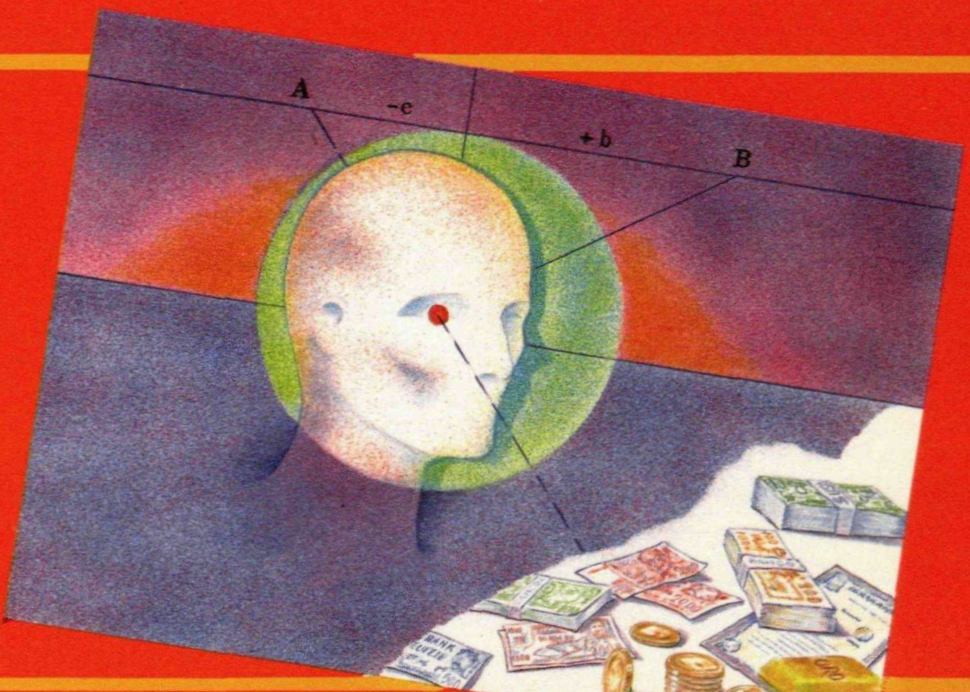
Vicente T. González Catalá

Enfoque práctico de las operaciones de la Matemática Financiera



Ediciones Ciencias Sociales

1º

Vicente T. González Catalá

Enfoque práctico de las operaciones de la Matemática Financiera

Vicente T. González Catalá

Enfoque práctico de las operaciones de la Matemática Financiera

Ediciones Ciencias Sociales

Emilio Mario, 11. 28002 Madrid

Impresión: Fernández Ciudad, S. L.
Catalina Suárez, 19. 28007 Madrid

Encuadernación: Encuadernación Unida, S. L.

ISBN: 84-87510-26-4
Depósito legal: M. 36.859/1991
Impreso en España - *Printed in Spain*

A Lola,
mi esposa.

PROLOGO

Nuestro propósito es elaborar un manual que compatibilice el rigor científico con el estudio práctico de las Operaciones de la Matemática Financiera y sirva de estudio y consulta a los alumnos de las Facultades de Ciencias Económicas y Empresariales, de Escuelas Universitarias de Estudios Empresariales, de Escuelas de Administración de Empresas, Economistas, Actuarios, Titulares Mercantiles y, en general, a todos los que de alguna manera desarrollan actividades económico-financieras y deban adoptar decisiones en este campo.

Para conseguir este objetivo hemos sistematizado nuestros conocimientos adquiridos y vividos a lo largo de más de trece cursos de experiencia en las aulas, impartiendo el Curso de Matemática de las Operaciones Financieras y siguiendo, básicamente, las directrices doctrinales de nuestro maestro Lorenzo Gil Peláez, Catedrático de Matemática de las Operaciones Financieras en la Universidad Complutense de Madrid, con quien nos sentimos plenamente identificados.

Creemos que está justificado desarrollar un manual exclusivamente empírico-práctico y con ausencia de planteamientos teóricos, pues éstos se encuentran desarrollados con la suficiente rigurosidad, profundidad y precisión en la obra «Matemática de las Operaciones Financieras», del citado profesor Gil Peláez, cuya lectura previa consideramos indispensable.

En primer lugar y siguiendo el mismo orden metodológico que en el citado curso teórico, se desarrollan ejercicios que son aplicación directa de la teoría, para continuar, en forma gradual y progresiva, con el planteamiento y resolución de supuestos usuales en la actividad económico-financiera. La última etapa consiste en abordar estudios que sirvan de iniciación metodológica al análisis de inversiones y de su forma de financiación.

La presente obra se estructura en cinco partes cuyos títulos y contenidos pasamos a reseñar brevemente.

Primera parte: CONCEPTOS BASICOS

En ella se exponen ejercicios destinados a precisar el lenguaje y la medición financiera sobre las siguientes cuestiones:

- Leyes financieras y sus propiedades.
- Equivalencias y orden de preferencias entre capitales financieros.
- Suma financiera de capitales.
- Operaciones financieras y cálculo de reservas matemáticas.
- Magnitudes derivadas en capitalización y en descuento, efectuando especial hincapié en factores, réditos y tantos y en el cálculo de los intereses y los descuentos.
- Obtención de leyes y sistemas financieros a través del concurso de otros ya conocidos por prolongación y conjugación.
- Determinación de sistemas haciendo hipótesis sobre las magnitudes derivadas tantos instantáneos.
- Identificación de los sistemas financieros estacionarios, sumativos, multiplicativos y unificables por sus propiedades más características.
- Unificación de capitales.
- Elaboración de leyes financieras con el concurso de otras ya conocidas mediante los denominados procesos financieros.
- Obtención de tantos equivalentes.

Segunda parte: RENTAS

Se comienza con el planteamiento y determinación de los valores de rentas en los puntos notables (origen y final), siguiendo la tipología más notable que distinguen entre rentas:

- Discretas y contínuas.
- Prepagables y pospagables.
- Inmediatas, diferidas y anticipadas.
- Constantes y variables.
- Temporales y perpetuas.

y combinaciones de estas clasificaciones.

Con especial interés y profundidad se aborda la problemática del fraccionamiento de las rentas y su valoración, ya que en la vida real es el supuesto más usual.

Por último, se efectúa el planteamiento, valoración y diagnóstico, desde el punto de vista financiero, de algunos proyectos de inversión.

Tercera parte: OPERACIONES FINANCIERAS

Se subdivide en tres secciones que se identifican con los grupos de operaciones más notables.

Sección primera: Operaciones simples

La operaciones simples o elementales se caracterizan porque la prestación y la contraprestación están formadas cada una por un solo capital.

Se estudian los supuestos de operaciones:

- Con réditos constantes y con réditos variables.
- Puros y con características comerciales.

Además, se plantea el cálculo de:

- Reservas matemáticas.
- Réditos y tantos medios.
- Los réditos y tantos medios efectivos: de la operación, activo o del prestamista o acreedor y pasivo del prestatario o deudor.

Por último, se hace referencia al problema de la cancelación anticipada.

Sección segunda: Operaciones de constitución

Las operaciones de constitución se caracterizan por poseer prestación múltiple y contraprestación única. Su objeto es la formación de un capital mediante la entrega de los términos constitutivos de la prestación o imposiciones.

Se distinguen dos modalidades de la operación:

- Con imposiciones prepagables.
- Con imposiciones pospagables.

y dentro de cada una de ellas cabe resaltar los casos particulares con rédito periodal constante y:

- Términos constitutivos o imposiciones constantes.
- Cuotas de constitución constantes.

También se dedican algunos supuestos:

- Al estudio de los cuadros de constitución, para analizar con minuciosidad este tipo de operaciones.
- Al cálculo de los réditos y tantos medios.

- A las operaciones con características comerciales para obtener los tantos efectivos: de la operación, activo o del acreedor, prestamista o depositante y pasivo o del deudor, prestatario o depositario.

Sección tercera: Operaciones de amortización

Las operaciones de amortización o de préstamo se componen de prestación única y contraprestación múltiple. Los capitales de la contraprestación tienen como misión amortizar el capital inicial que se presta.

Se comienza con el análisis de préstamos de tipo general y de las diversas interpretaciones o concepciones de la operación de amortización para continuar con la aplicación de los métodos particulares usuales:

- Francés o progresivo.
- Alemán.
- Americano.
- Términos variables en progresión aritmética y geométrica.
- Cuota de amortización constante.

Asimismo, se distinguen los supuestos de devengo de intereses pospagables, prepagables y fraccionados.

El estudio se complementa con la resolución de supuestos sobre:

- Cuadros de amortización.
- Réditos y tantos medios.
- Tantos efectivos: de la operación, activo o del prestamista y pasivo o del prestatario.
- Valor del préstamo, valor del usufructo y valor de la nuda propiedad.

Cuarta parte: EMPRESTITOS

Esta parte se destina al estudio de emisiones de obligaciones o empréstitos distinguiendo entre:

- Normales o puros y con características comerciales.
- Con pago periódico de cupones (pospagables y prepagables) y con abono de intereses acumulados.

Desde el punto de vista matemático, el emisor o prestatario se plantea básicamente los siguientes problemas:

a) Cantidad periódica a destinar el servicio de empréstito para su amortización.

b) Cálculo del número de obligaciones y del número de amortizadas en cada período.

c) Dadas las características comerciales del empréstito, determinar el tanto efectivo del mismo.

Para el obligacionista, la suscripción de un título de un empréstito supone una colocación de capital por lo que la decisión de invertir se basará fundamentalmente en:

1. La rentabilidad media esperada.
2. Estimación de la duración de la inversión.

Además de los problemas enunciados, se estudian también los referentes a la valoración de un título en el mercado.

Quinta parte: COMBINACIONES DE OPERACIONES

Una vez efectuada la aplicación de la métrica financiera en los ejercicios propuestos y resueltos casos concretos de sus operaciones más notables, se pasa al análisis de casos económico-financieros en los que intervienen simultáneamente los conocimientos adquiridos en las partes anteriores.

En esta última parte, la de mayor extensión en el manual, se pretende, mediante el estudio exhaustivo de los supuestos que se proponen, resaltar la interrelación existente entre las diversas operaciones financieras y mostrar parte de las posibilidades del método operativo que proporciona la Matemática de las Operaciones Financieras.

Para terminar este prólogo, sólo nos resta reconocer y agradecer sus valiosas sugerencias a los amigos y compañeros en las tareas docentes Andrés de Pablo López, Vicente Meneu Ferrer, Juan Puga Fernández y en especial a Ana M.ª Vicente Merino y Nines Gil Luezas de imborrable recuerdo, pues, además, sobre ellas recayó la ingrata labor de corrección y comprobación.

VICENTE T. GONZALEZ CATALA

Catedrático de Matemática de las Operaciones Financieras en la Universidad de Alcalá. Catedrático de Análisis Matemático y Matemática Financiera de Escuelas de Comercio. Actuario de Seguros.

INDICE

Prólogo 7

Primera parte: Conceptos básicos 15

Segunda parte: Rentas 69

Tercera parte: Operaciones Financieras 129

Sección primera: Operaciones simples 131

Sección segunda: Operaciones de constitución 145

Sección tercera: Operaciones de amortización o de préstamo 183

Cuarta parte: Empréstitos 281

Quinta parte: Combinaciones de operaciones 405

PRIMERA PARTE

CONCEPTOS BASICOS

SUPUESTOS SOBRE CONCEPTOS BASICOS

N. 1

Comprobar si pueden utilizarse como leyes financieras de capitalización las siguientes funciones:

1.º $G(t; p) = e^{a(p-t)+b}$

2.º $G(t; p) = 1 + k(p-t) + h$

3.º $G(t; p) = 1 + a(p^2 - t^2) + a(p-t)$

4.º $G(t; p) = e^{b(p^2-t^2)+b(p-t)}$

5.º $G(t; p) = (1+\alpha)^{p(p-t)}$

Las propiedades que debe satisfacer una función $G(t; p)$ para poder utilizarse como una ley financiera de capitalización son:

a) Ser positiva y mayor que 1.

b) Para $t = p$ es $G(t; t) = G(p; p) = 1$.

c) Monótona decreciente con t y monótona creciente con p. Si la función es derivable la condición se expresa por:

$$\frac{\partial G(t; p)}{\partial t} < 0 \; ; \; \frac{\partial G(t; p)}{\partial p} > 0$$

d) Continua respecto a t y continua respecto a p separadamente. Es decir verificar:

$$\Delta_p G(t; p) \xrightarrow[\Delta p \to 0]{} 0 \; ; \; \Delta_t G(t; p) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

Analizaremos estas condiciones en las funciones propuestas.

1.° $G(t; p) = e^{a(p-t)+b}$

a) $G(t; p) > 1$. Para ello debe ser $a\,(p-t) + b > o$, lo cual implica que sea $a > -\dfrac{b}{p-t}$.

b) $G(t; t) = e^{a\,(t-t)+b} = 1$ si $b = 0$

$G(p; p) = e^{a(p-p)+b} = 1$ si $b = 0$

Obsérvese que si $b = o$ es $a > 0$.

c) $$\frac{\partial G(t; p)}{\partial t} = e^{a(p-t)}\,(-a) < 0 \text{ si } a > 0$$

$$\frac{\partial G(t; p)}{\partial p} = e^{a(p-t)}\,a > 0 \text{ si } a > 0$$

d) $$\Delta_p G(t; p) = e^{a(p-t)}\,(e^{a\Delta p} - 1) \xrightarrow[\Delta_p \to 0]{} 0$$

$$\Delta_t G(t; p) = e^{a(p-t)}\,(e^{-a\Delta t} - 1) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

Por tanto la ley financiera de capitalización que se obtiene es:

$$L(t; p) = e^{a(p-t)}, \text{ con } a > 0$$

2.° $G(t; p) = 1 + k(p-t) + h$.

Siguiendo el mismo proceso que en el caso anterior, se tiene:

a) $G(t; p) > 1 \Rightarrow K\,(p-t) + h > 0 \Rightarrow K > -\dfrac{h}{p-t}$

b) $$\left.\begin{aligned} G(t; t) &= 1 + K(t-t) + h = 1. \\ G(p; p) &= 1 + K\,(p-p) + h = 1. \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = 0$$

c) $$\frac{\partial G(t; p)}{\partial t} = -K \quad \Rightarrow K > 0$$

$$\frac{\partial G(t;p)}{\partial p} = K. \Rightarrow K > 0$$

d) $\Delta_p G(t;p) = K\,\Delta p \xrightarrow[\Delta_p \to 0]{} 0$

$\Delta_t G(t;p) = -K\,\Delta t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$

La ley de capitalización que se obtiene es:

$$L(t;p) = 1 + K(p-t), \text{ para } K > 0$$

3.º $G(t;p) = 1 + a(p^2 - t^2) + a(p-t)$.

a) $G(t;p) > 1 \Rightarrow a(p^2 - t^2) + a(p-t) = a(p-t)\,(p+t+1) > 0 \Rightarrow a > 0.$

b) $G(t;t) = 1 + a\,(t^2 - t^2) + a\,(t-t) = 1.$

$G(p;p) = 1 + a(p^2 - p^2) + a(p-p) = 1.$

c) $$\left.\begin{aligned} \frac{\partial G(t;p)}{\partial t} &= -2at - a = -a(2t+1) \\ \frac{\partial G(t;p)}{\partial p} &= 2ap + a = a(2p+1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow a > 0$$

d) $\Delta_p G(t;p) = a\,\Delta p(2p + \Delta p + 1) \xrightarrow[\Delta p \to 0]{} 0$

$\Delta_t G(t;p) = -a\,\Delta t(2t + \Delta t + 1) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$

Resulta la siguiente ley:

$$L(t;p) = 1 + a(p^2 - t^2) + a(p-t), \text{ para } a > 0$$

4.º $G(t;p) = e^{b(p^2 - t^2) + b(p-t)}$

a) $G(t;p) > 1 \Rightarrow b(p^2 - t^2) + b(p-t) > 0 \Rightarrow b > 0$

b) $G(t;t) = e^{b(t^2 - t^2) + b(t-t)} = e^{b(p^2 - p^2) + b(p-p)} = G(p;p) = 1$

$$c)\quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial G(t;p)}{\partial p} &= e^{b(p^2-t^2)+b(p-t)}\,(2bp+b) > 0 \\ \frac{\partial G(t;p)}{\partial t} &= e^{b(p^2-t^2)+b(p-t)}\,(-2bt-b) < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow b > 0$$

$$d)\quad \Delta_p G(t;p) = e^{b(p^2-t^2)+b(p-t)}\left[e^{b\Delta p(2p+\Delta p+1)}-1\right] \xrightarrow[\Delta p\to 0]{} 0$$

$$\Delta_t G(t;p) = e^{b(p^2-t^2)+b(p-t)}\left[e^{-b\Delta t(2t+\Delta t+1)}-1\right] \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0$$

Resulta la siguiente ley:

$$L(t;p) = e^{b(p^2-t^2)+b(p-t)}, \text{ con } b > 0$$

5.° $G(t;p) = (1+\alpha)^{p(p-t)}$

a) $G(t;p) > 1 \Rightarrow 1+\alpha > 1 \Rightarrow \alpha > 0$

b) $G(t;t) = (1+\alpha)^{t(t-t)} = (1+\alpha)^{p(p-p)} = G(p;p) = 1$

$$c)\quad \frac{\partial G(t;p)}{\partial p} = (1+\alpha)^{p(p-t)}\, lg_e(1+\alpha)\,(2p-t) > 0$$

$$\frac{\partial G(t;p)}{\partial t} = (1+\alpha)^{p(p-t)}\, lg_e(1+\alpha)\,(-p) < 0$$

$$d)\quad \Delta_p G(t;p) = (1+\alpha)^{p(p-t)}\left[(1+\alpha)^{\Delta p(2p+\Delta p-t)}-1\right] \xrightarrow[\Delta p\to 0]{} 0$$

$$\Delta_t G(t;p) = (1+\alpha)^{p(p-t)}\left[(1+\alpha)^{-p\Delta t}-1\right] \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0$$

La ley obtenida es:

$$L(t;p) = (1+\alpha)^{p(p-t)}, \text{ con } \alpha > 0.$$

N. 2

Estudiar las condiciones que deben verificar las funciones que se relacionan a continuación, para ser leyes financieras de descuento:

1.º $\boldsymbol{H(t;p) = 1 - d(t-p)}$

2.º $\boldsymbol{H(t;p) = \dfrac{a}{a + b(t-p)}}$

3.º $\boldsymbol{H(t;p) = e^{-K(t^3 - p^3)}}$

Las propiedades que debe cumplir una función $H(t;p)$, para poder ser una ley financiera de descuento son:

a) $0 < H(t;p) < 1$.

b) $H(t;t) = H(p;p) = 1$.

c) Monótona creciente con p y monótona decreciente con t.

d) Continua respecto a t y continua respecto a p separadamente.

Para las funciones propuestas se tiene:

1.º $H(t;p) = 1 - d(t-p)$.

a) $0 < H(t;p) < 1 \Rightarrow 1 > d(t-p) > 0 \Rightarrow 0 < d < \dfrac{1}{t-p}$.

b) $H(t;t) = 1 - d(t-t) = 1 - d(p-p) = H(p;p) = 1$.

c) $$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial H(t;p)}{\partial t} = -d < 0 \\[2ex] \dfrac{\partial H(t;p)}{\partial p} = d > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow d > 0$$

d) $$\Delta_p H(t;p) = d\Delta p \xrightarrow[\Delta p \to 0]{} 0$$

$$\Delta_t H(t;p) = -d\Delta t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

Por tanto, la ley de descuento es:

$$A(t; p) = 1 - d(t - p)$$

con $0 < d < \dfrac{1}{t - p}$

2.º $H(t; p) = \dfrac{a}{a + b(t - p)}$

a) $0 < H(t; p) < 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{1 + \dfrac{b}{a}(t - p)} < 1 \Rightarrow \dfrac{b}{a}(t - p) > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} > 0$

El signo de *a* y *b* debe ser el mismo.

b) $H(t; t) = \dfrac{a}{a + b(t - t)} = \dfrac{a}{a + b(p - p)} = H(p; p) = \dfrac{a}{a} = 1$

c) $\dfrac{\partial H(t; p)}{\partial t} = -\dfrac{a \cdot b}{a + b(t - p)^2} < 0$ si signo de a = signo de b.

$\dfrac{\partial H(t; p)}{\partial p} = \dfrac{a\,b}{[a + b(t - p)]^2} > 0$ si signo de a = *signo de b*.

d) $\Delta_p H(t; p) = \dfrac{a \cdot b\, \Delta p}{[a + b(t - p - \Delta p)]\,[a + b(t - p)]} \xrightarrow[\Delta p \to 0]{} 0$

$\Delta_t H(t; p) = \dfrac{-a\,b\,\Delta t}{[a + b(t + \Delta t - p)]\,[a + b(t - p)]} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$

La ley de descuento es:

$$A(t; p) = \frac{a}{a + b(t - p)} = \frac{1}{1 + \dfrac{b}{a}(t - p)}$$

con $\dfrac{b}{a} > 0$.

3.º $H(t; p) = e^{-K(t^3 - p^3)}$

a) $0 < H(t; p) < 1 \Rightarrow 0 < e^{-K(t^3 - p^3)} < 1 \Rightarrow K > 0$

b) $H(t; t) = e^{-K(t^3 - t^3)} = e^{-K(p^3 - p^3)} = H(p; p) = 1$

$$c)\quad \left.\begin{aligned} \frac{\partial H(t;p)}{\partial t} &= e^{-K(t^3-p^3)}(-3Kt^2) < 0 \\ \frac{\partial H(t;p)}{\partial p} &= e^{-K(t^3-p^3)}.\,3Kp^2 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow K > 0$$

$$d)\quad \Delta_p H(t;p) = e^{-K(t^3-p^3)}\left(e^{K\,\Delta p(3p^2+3p+\Delta^2 p)} - 1\right) \xrightarrow[\Delta p \to 0]{} 0$$

$$\Delta_t H(t;p) = e^{-K(t^3-p^3)}\left(e^{-K\,\Delta t(3t^2+3t+\Delta^2 t)} - 1\right) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

Por tanto, resulta:

$A(t;p) = e^{-K(t^3-p^3)}$ con $K > 0$.

N. 3

Obtener las leyes de descuento prolongadas y las conjugadas de las de capitalización del ejercicio N. 1.

1.º De $L(t;p) = e^{a(p-t)}$, con $a > 0$, se sigue:

– Ley prolongada: $A_1(t;p) = e^{-a(t-p)}$

– Ley conjugada: $A_2(t;p) = \dfrac{1}{e^{a(t-p)}} = e^{-a(t-p)}$

Al ser $A_1(t;p) = A_2(t;p)$ esta expresión única, recibe el nombre de ley proloconjugada.

2.º A partir de $L(t;p) = 1 + K(p-t)$, con $K > 0$, se tiene:

$$A_1(t;p) = 1 - K(t-p)$$

$$A_2(t;p) = \frac{1}{1 + K(t-p)}$$

3.º Por ser $L(t;p) = 1 + a(p^2 - t^2) + a(p - t)$, con $a > 0$, resulta:

$$A_1(t;p) = 1 - a(t^2 - p^2) - a(t - p)$$

$$A_2(t;p) = \frac{1}{1 + a(t^2 - p^2) + a(t - p)}$$

4.º Como es $L(t;p) = e^{b(p^2 - t^2) + b(p - t)}$, con $b > 0$, se sigue:

$$A_1(t;p) = e^{-b(t^2 - p^2) - b(t - p)}$$

$$A_2(t;p) = \frac{1}{e^{b(t^2 - p^2) + b(t - p)}} = A_1(t;p)$$

5.º Para $L(t;p) = (1 + \alpha)^{p(p - t)}$, con $\alpha > 0$, es:

$$A_1(t;p) = (1 + \alpha)^{-p(t - p)}$$

$$A_2(t;p) = \frac{1}{(1 + \alpha)^{t(t - p)}} = (1 + \alpha)^{-t(t - p)}$$

N. 4

Determinar las expresiones de capitalización prolongadas y las conjugadas, de las leyes de descuento obtenidas en el ejercicio N. 2.

1.º De $A(t;p) = 1 - d(t - p)$, se obtiene:

$$L_1(t;p) = 1 + d(p - t)$$

$$L_2(t;p) = \frac{1}{1 - d(p - t)}$$

2.º Para $A(t;p) = \dfrac{1}{1 + \frac{b}{a}(t - p)}$ resulta:

$$L_1(t;p) = \frac{1}{1 - \frac{b}{a}(p - t)}$$

$$L_2(t;p) = 1 + \frac{b}{a}(p - t)$$

3.º Por ser $A(t; p) = e^{-K(t^3 - p^3)}$ se sigue:

$$L_1(t; p) = e^{K(p^3 - t^3)}$$

$$L_2(t; p) = \frac{1}{e^{-K(p^3 - t^3)}} = L_1(t; p)$$

N. 5

Con las leyes:

a) $L(t; p) = 1 + 0{,}11(p - t)$

b) $L(t; p) = e^{0{,}09(p - t)}$

c) $L(t; p) = (1 + 0{,}01)^{p(p - t)}$

calcular el capital (V, $p = 8$), proyección financiera o sustituto del capital ($C_1 = 500.000$, $t_1 = 0$), y el capital (C_2, $t_2 = 5$) equivalente al (C_1, t_1) según $p = 8$.

El principio de sustitución o proyección financiera en p y la relación de equivalencia entre capitales para

$$(C_1, t_1) \underset{p}{\sim} (C_2, t_2) \underset{p}{\sim} (V, p)$$

nos permiten escribir:

$$V = C_1 \, L(t_1 ; p) = C_2 \, L(t_2 ; p)$$

y

$$C_2 = C_1 \, \frac{L(t_1 ; p)}{L(t_2 ; p)}$$

Por tanto, para las leyes del enunciado resulta:

a) $V = 500.000 \, [1 + 0{,}11 \, (8 - 0)] = 940.000$

$$C_2 = 500.000 \, \frac{1 + 0{,}11(8 - 0)}{1 + 0{,}11(8 - 5)} = 706.766{,}92$$

b) $V = 500.000\, e^{0,09(8-0)} = 1.027.216,6$

$$C_2 = 500.000\, \frac{e^{0,09(8-0)}}{e^{0,09(8-5)}} = 784.156,06$$

c) $V = 500.000\, (1 + 0,01)^{8(8-0)} = 945.230,95$

$$C_2 = 500.000\, \frac{(1 + 0,01)^{8(8-0)}}{(1 + 0,01)^{8(8-5)}} = 744.431,91$$

N. 6

Con las leyes:

***a*) $A(t; p) = 1 - 0,08(t - p)$**

***b*) $A(t; p) = \dfrac{1}{1 + 0,08(t - p)}$**

***c*) $A(t; p) = (1 + 0,08)^{-(t-p)}$**

Obtener los capitales $(V,\, p = 1)$ y $(C_1;\, t_1 = 3)$ equivalentes al $(C_2 = 1.000.000,\, t_2 = 10)$.

De la equivalencia:

$$(V, p) \underset{p}{\sim} (C_1, t_1) \underset{p}{\sim} (C_2, t_2)$$

se sigue:

$$V = C_1 \mathrm{A}(t_1; p) = C_2 \mathrm{A}(t_2; p)$$

$$C_1 = C_2\, \frac{A(t_2; p)}{A(t_1; p)}$$

y aplicando estas relaciones con las leyes dadas, resulta:

a) $V = 1.000.000\, \left[1 - 0,08(10 - 1)\right] = 280.000$

$$C_1 = 1.000.000\, \frac{1 - 0,08(10 - 1)}{1 - 0,08(3 - 1)} = 333.333,33$$

b) $$V = 1.000.000 \frac{1}{1 + 0{,}08(10 - 1)} = 581.395{,}35$$

$$C_1 = 1.000.000 \frac{1 + 0{,}08(3 - 1)}{1 + 0{,}08(10 - 1)} = 674.418{,}60$$

c) $$V = 1.000.000\ (1 + 0{,}08)^{-(10-1)} = 500.248{,}97$$

$$C_1 = 1.000.000 \frac{(1 + 0{,}08)^{-(10-1)}}{(1 + 0{,}08)^{-(3-1)}} = 583.490{,}40$$

N. 7

Dados los capitales (C_1 = 100.000, t_1 = 1), (C_2 = 200.000, t_2 = 3), (C_3 = 200.000, t_3 = 6) y (C_4 = 150.000, t_4 = 7) y las leyes del ejercicio N. 5, para p = 10, se pide:

1.° Ordenar los capitales.
2.° Obtener el capital (C, τ = 5) suma financiera de los anteriores.

1.° Ordenación de los capitales:

Dados dos capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2) se dice que el segundo es preferible o indiferente al primero, si la proyección en p de éste es menor o igual que la del segundo, o sea:

$$(C_1, t_1) \underset{p}{\precsim} (C_2, t_2) \Leftrightarrow C_1 L(t_1; p) \leq C_2 L(t_2; p)$$

Para ordenar los cuatro capitales dados se aplicará el criterio de preferencia de las leyes correspondientes:

a) Con la ley $L(t; p) = 1 + 0{,}11(p - t)$ para $p = 10$.

$$V_1 = 100.000\left[1 + 0{,}11(10 - 1)\right] = 199.000$$

$$V_2 = 200.000\left[1 + 0{,}11(10 - 3)\right] = 354.000$$

$$V_3 = 200.000\left[1 + 0{,}11(10 - 6)\right] = 288.000$$

$$V_4 = 150.000\left[1 + 0{,}11(10 - 7)\right] = 199.500$$

La ordenación es:

$$(C_1, t_1) \prec (C_4, t_4) \prec (C_3, t_3) \prec (C_2, t_2)$$

b) Con la ley $L(t; p) = e^{0,09(p-t)}$, para $p = 10$

$$V_1 = 100.000\ e^{0,09(10-1)} = 224.790,83$$

$$V_2 = 200.000\ e^{0,09(10-3)} = 375,522,16$$

$$V_3 = 200.000\ e^{0,09(10-6)} = 286.665,90$$

$$V_4 = 150.000\ e^{0,09(10-7)} = 196.494,67$$

Resulta la clasificación:

$$(C_4, t_4) \prec (C_1, t_1) \prec (C_3, t_3) \prec (C_2, t_2)$$

c) Con la ley $L(t; p) = (1 + 0,01)^{p(p-t)}$, para $p = 10$.

$$V_1 = 100.000\ (1 + 0,01)^{10(10-1)} = 244.863,22$$

$$V_2 = 200.000\ (1 + 0,01)^{10(10-3)} = 401.352,60$$

$$V_3 = 200.000\ (1 + 0,01)^{10(10-6)} = 297.772,72$$

$$V_4 = 150.000\ (1 + 0,01)^{10(10-7)} = 202.177,32$$

La relación es:

$$(C_4, t_4) \prec (C_1, t_1) \prec (C_3, t_3) \prec (C_2, t_2)$$

2.º Obtención del capital suma $(C, \tau = 5)$.

Un capital (C, τ) es suma financiera de los capitales (C_1, t_1), (C_2, t_2), ..., (C_n, t_n), si la proyección en p de (C, τ) es igual a la suma financiera en p de los n capitales sumandos, es decir:

$$C\, L(\tau; p) = \sum_{s=1}^{n} C_s\, L(t_s; p) = \sum_{s=1}^{n} V_s$$

y, en consecuencia, resulta:

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s \frac{L(t_s; p)}{L(\tau; p)} = \frac{\sum_{s=1}^{n} V_s}{L(\tau; p)}$$

Los resultados son:

a) Con la ley $L(t; p) = 1 + 0{,}11\ (p - t)$

$$C = \frac{\sum_{s=1}^{4} V_s}{1 + 0{,}11(10 - 5)} = \frac{1.040.500}{1{,}55} = 671.290{,}32$$

b) Con la ley $L(t; p) = e^{0{,}09(p - t)}$

$$C = \frac{1.083.473{,}56}{e^{0{,}09(10 - 5)}} = 690.853{,}24$$

c) Con la ley $L(t; p) = (1 + 0{,}01)^{p(p - t)}$

$$C = \frac{1.146.165{,}86}{(1 + 0{,}01)^{10(10 - 5)}} = 696.913{,}35$$

N. 8

Calcular la suma financiera de los capitales ($C_1 = 250.000$, $t_1 = 4$) ($C_2 = 250.000$, $t_2 = 6$) y ($C_3 = 400.000$, $t_3 = 8$) en el punto $\tau = 7$, con las leyes del ejercicio N. 6 para $p = 2$.

El capital suma (C, τ) verifica que:

$$C\,A(\tau; p) = \sum_{s=1}^{3} C_s A(t_s; p)$$

y su cuantía es:

$$C = \sum_{s=1}^{3} C_s \frac{A(t_s; p)}{A(\tau; p)}$$

La aplicación de las leyes del ejercicio N. 6 proporciona los resultados siguientes:

a) Con la ley $A(t;p) = 1 - 0{,}08(t-p)$

$$C = 250.000 \frac{1-0{,}08(4-2)}{1-0{,}08(7-2)} + 250.000 \frac{1-0{,}08(6-2)}{1-0{,}08(7-2)} +$$

$$+ 400.000 \frac{1-0{,}08(8-2)}{1-0{,}08(7-2)} = 980.000$$

b) Con la ley $A(t;p) = \dfrac{1}{1+0{,}08(t-p)}$

$$C = 250.000 \frac{1+0{,}08(7-2)}{1+0{,}08(4-2)} + 250.000 \frac{1+0{,}08(7-2)}{1+0{,}08(6-2)} +$$

$$+ 400.000 \frac{1+0{,}08(7-2)}{1+0{,}08(8-2)} = 945.254{,}03$$

c) Con la ley $A(t;p) = (1+0{,}08)^{-(t-p)}$

$$C = 250.000\,(1+0{,}08)^3 + 250.000\,(1+0{,}08) +$$

$$+ 400.000\,(1+0{,}08)^{-1} = 955.298{,}37$$

N. 9

Sea una operación financiera definida por:

– Prestación: $\{(C_1, t_1), (C_2, t_2), (C_3, t_3)\}$

– Contraprestación: $\{(C'_1, t'_1), (C'_2, t'_2)\}$

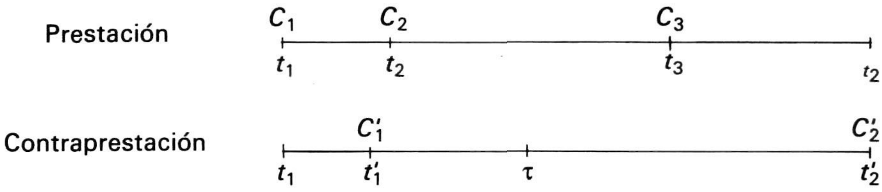
con $t_1 < t'_1 < t_2 < t_3 < t'_2$.

Determinar la reserva o saldo, por los métodos prospectivo y retrospectivo, en el punto τ, **con** $t_2 < \tau < t_3$, **en los supuestos:**

1.° Operación concertada con una ley de capitalización $L(t;p)$.

2.° Operación concertada con una ley de descuento $A(t;p)$.

La operación descrita en el ejercicio es la recogida en el siguiente esquema:



y la reserva o saldo en el punto τ es:

1.º Con la ley de capitalización $L(t; p)$, para $p \geq t'_2$.

– Por el método retrospectivo:

$$R_\tau = \left[C_1 \frac{L(t_1; p)}{L(\tau; p)} + C_2 \frac{L(t_2; p)}{L(\tau; p)} \right] - C'_1 \frac{L(t'_1; p)}{L(\tau; p)}$$

– Por el método prospectivo:

$$R_\tau = C'_2 \frac{L(t'_2; p)}{L(\tau; p)} - C_3 \frac{L(t_3; p)}{L(\tau; p)}$$

2.º Con la ley de descuento $A(t; p)$, para $p \leq t_1$.

– Por el método retrospectivo:

$$R_\tau = \left[C_1 \frac{A(t_1; p)}{A(\tau; p)} + C_2 \frac{A(t_2; p)}{A(\tau; p)} \right] - C'_1 \frac{A(t'_1; p)}{A(\tau; p)}$$

– Por el método prospectivo:

$$R_\tau = C'_2 \frac{A(t'_2; p)}{A(\tau; p)} - C_3 \frac{A(t_3; p)}{A(\tau; p)}$$

N. 10

En la operación financiera con prestación ($C_1 = 50.000$, $t_1 = t + 1$), ($C_2 = 100.000$, $t_2 = t + 4$), ($C_3 = 200.000$, $t_3 = t + 7$) y contraprestación:

$$\mathbf{(C'_1 = 150.000,\ t'_1 = t + 3),\ (C'_2 = 100.000,\ t'_2 = t + 5),\ (C'_3 = X,\ t'_3 = t + 10)}$$

si la ley bajo la cual ha sido pactada es $L(t; p) = 1 + 0{,}08\,(p - t)$, con $p = t + 14$, obtener:

1.° Cuantía de X.

2.° Reserva o saldo en el año $\tau = t + 5$ por los métodos prospectivo y retrospectivo.

3.° Saldos por recurrencia en $t + 7$ en función del saldo en $t + 5$, y en $t + 10$ en función del de $t + 7$.

4.° ¿Qué clase de operación es?

1.° El principio de equivalencia de toda operación financiera exige la igualdad en p de las sumas de las proyecciones de los capitales de la prestación y de la contraprestación, es decir:

$$\sum_{s=1}^{m} C_s\, L(t_s; p) = \sum_{s=1}^{n} C'_s\, L(t'_s; p)$$

por lo que resulta:

$$50.000\,[1 + 0{,}08\,(t + 14 - t - 1)] + 100.000\,[1 + 0{,}08\,(t + 14 - t - 4)] +$$
$$+ 200.000\,[1 + 0{,}08\,(t + 14 - t - 7)] =$$
$$= 150.000\,[1 + 0{,}08\,(t + 14 - t - 3)] + 100.000\,[1 + 0{,}08\,(t + 14 - t - 5)] +$$
$$+ X\,[1 + 0{,}08\,(t + 14 - t - 10)]$$

y efectuando operaciones

$$X = 106.060{,}61$$

2.° La reserva por la derecha en el año $t + 5$, es decir un instante después del vencimiento de la cuantía $C'_2 = 100.000$ es:

a) Por el método retrospectivo:

$$R^{+}_{t+5} = 50.000\ \frac{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 1)}{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 5)} +$$

$$+ 100.000\ \frac{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 4)}{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 5)} -$$

$$- 150.000\ \frac{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 3)}{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 5)} - 100.000 = - 100.000$$

b) Por el método prospectivo:

$$R^{+}_{t+5} = 106.060{,}61\ \frac{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 10)}{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 5)} -$$

$$- 200.000\ \frac{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 7)}{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 5)} = - 100.000$$

La reserva por la izquierda en $t + 5$, o sea un instante antes de vencer C'_2, es:

$$R^{-}_{t+5} = R^{+}_{t+5} - 100.000 = 0$$

3.º Los saldos por la derecha en $t + 7$ y $t + 10$ son:

$$R^{+}_{t+7} = - 100.000\ \frac{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 5)}{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 7)} + 200.000 = 89.743{,}59$$

$$R^{+}_{t+10} = 89.743{,}59\ \frac{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 7)}{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 10)} - 106.060{,}61 = 0$$

y los saldos por la izquierda:

$$R^{-}_{t+7} = (R^{-}_{t+5}) - C'_2)\ \frac{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 5)}{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 7)} = - 110.256{,}41$$

$$R^{-}_{t+10} = (R^{-}_{t+7}) + C_3)\ \frac{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 7)}{1 + 0{,}08\ (t + 14 - t - 10)} = 106.060{,}61$$

4.º La operación se puede clasificar como:

a) Cierta por ser de esta naturaleza los capitales que la integran.

b) Predeterminada o definida ex-ante, ya que desde el origen se especifican los capitales de la prestación y de la contraprestación.

c) A largo plazo por rebasar su duración el año.

d) Compuesta, pues intervienen varios capitales en prestación y contraprestación.

e) De capitalización.

f) De crédito recíproco, pues en $t'_1 = t + 3$ cambia el sentido crediticio inicial.

N. 11

Obtener las magnitudes derivadas, factores, réditos y tantos de capitalización, asociadas al intervalo ($t_1 = t + 2$, $t_2 = t + 6$) con las leyes:

1.º $L(t; p) = 1 + 0{,}10\,(p - t)$, con $p = t + 10$.

2.º $L(t; p) = (1 + 0{,}10)^{p-t}$, con $p = t + 10$.

Las magnitudes derivadas fundamentales son:

a) Factores:

– De capitalización: $u(t_1, t_2; p) = \dfrac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)}$

– De contracapitalización: $u^*(t_1, t_2; p) = \dfrac{L(t_2; p)}{L(t_1; p)} = \dfrac{1}{u(t_1, t_2; p)}$

– Logarítmico de capitalización $\varphi_1(t_1, t_2; p) = \log_e u(t_1, t_2; p)$.

b) Réditos:

– De capitalización: $i(t_1, t_2; p) = u(t_1, t_2; p) - 1$.

– De contracapitalización: $i^*(t_1, t_2; p) = 1 - u^*(t_1, t_2; p)$.

– De capitalización acumulada: $\xi(t_1, t_2; p) = L(t_1; p) - L(t_2; p)$.

c) Tantos:

– De capitalización: $\rho(t_1, t_2; p) = \dfrac{i(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$

– De contracapitalización: $\varrho^*(t_1, t_2; p) = \dfrac{i^*(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$

– De capitalización acumulado: $\mu(t_1, t_2; p) = \dfrac{\xi(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$

– Densidad logarítmica: $\theta_1(t_1, t_2; p) = \dfrac{\varphi_1(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$

d) Tantos instantáneos:

– De capitalización: $\rho(t; p) = -\dfrac{\dfrac{\partial L(t; p)}{\partial t}}{L(t; p)}$

– De capitalización acumulada: $\mu(t; p) = -\dfrac{\partial L(t; p)}{\partial t}$

La aplicación de las fórmulas anteriores da los siguientes resultados:

1.º Para la ley $L(t; p) = 1 + 0{,}10(p - t)$, con $p = t + 10$.

$$u(t+2, t+6; p) = \frac{1 + 0{,}10(t + 10 - t - 2)}{1 + 0{,}10(t + 10 - t - 6)} = 1{,}2857$$

$$u^*(t+2, t+6; p) = 0{,}7778 \ ; \ \varphi_1(t+2, t+6; p) = 0{,}2513$$

$$i(t+2, t+6; p) = 0{,}2857 \ ; \ i^*(t+2, t+6; p) = 0{,}2222 \ ;$$

$$\xi(t+2, t+6; p) = \left[1 + 0{,}10\,(t + 10 - t - 2)\right] - \left[1 + 0{,}10\,(t + 10 - t - 6)\right] = 0{,}40$$

$$\rho(t+2, t+6; p) = \frac{0{,}2857}{4} = 0{,}0714 \ ;$$

$$\varrho^*(t+2, t+6; p) = \frac{0{,}2222}{4} = 0{,}0555$$

$$\mu(t+2, t+6; p) = \frac{0{,}40}{4} = 0{,}10 \ ; \ \theta_1(t+2, t+6; p) = 0{,}0628$$

$$\varrho(t+2; p) = -\frac{-0{,}10}{1 + 0{,}10(t + 10 - t - 2)} = 0{,}0556 \ ; \ \mu(t+2; p) = 0{,}10$$

2.º Para la ley $L(t; p) = (1 + 0{,}10)^{p-t}$, con $p = t + 10$.

$$u(t+2,\, t+6;\, p) = \frac{(1+0{,}10)^{p-(t+2)}}{(1+0{,}10)^{p-(t+6)}} = (1+0{,}10)^4 = 1{,}4641$$

$$u^*(t+2,\, t+6;\, p) = 0{,}6830 \;;\; \varphi_1(t+2,\, t+6;\, p) = 0{,}3812$$

$$i(t+2,\, t+6;\, p) = 0{,}4641 \;;\; i^*(t+2,\, t+6;\, p) = 0{,}3170$$

$$\xi(t+2,\, t+6;\, p) = 0{,}2620\,(1+0{,}10)^{-10} = 0{,}1010 \;;$$

$$\theta_1(t+2,\, t+6;\, p) = 0{,}0953$$

$$\varrho(t+2,\, t+6;\, p) = 0{,}1160 \;;\; \varrho^*(t+2,\, t+6;\, p) = 0{,}0792 \;;$$

$$\mu(t+2,\, t+6;\, p) = 0{,}0253$$

$$\varrho(t+2;\, p) = \log_e(1+0{,}10) = 0{,}0953 \;;$$

$$\mu(t+2;\, p) = (1+0{,}10)^8 \log_e(1+0{,}10) = 0{,}2043$$

N. 12

Obtener las magnitudes derivadas factores, réditos y tantos de descuento, asociadas al intervalo ($t_1 = t+3$, $t_2 = t+11$) con las leyes:

1.° $A(t;\, p) = 1 - 0{,}07(t-p)$, con $p = t$.

2.° $A(t;\, p) = (1+0{,}07)^{-(t-p)}$.

Las magnitudes derivadas más importantes son:

a) Factores:

– De descuento: $v(t_1,\, t_2;\, p) = \dfrac{A(t_2;\, p)}{A(t_1;\, p)}$

– De contradescuento: $v^*(t_1,\, t_2;\, p) = \dfrac{A(t_1;\, p)}{A(t_2;\, p)} = \dfrac{1}{v(t_1,\, t_2;\, p)}$

– Logarítmico de descuento: $\varphi_2(t_1,\, t_2;\, p) = -\log_e v(t_1,\, t_2;\, p) =$

$$= \log_e v^*(t_1,\, t_2;\, p)$$

b) Réditos:

– De descuento: $d(t_1, t_2; p) = 1 - v(t_1, t_2; p)$.

– De contradescuento: $d^*(t_1, t_2; p) = v^*(t_1, t_2; p) - 1$.

– De descuento acumulado: $\eta(t_1, t_2; p) = A(t_1; p) - A(t_2; p)$.

c) Tantos:

– De descuento: $\delta(t_1, t_2; p) = \dfrac{d(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$

– De contradescuento: $\delta^*(t_1, t_2; p) = \dfrac{d^*(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$

– De descuento acumulado: $\upsilon(t_1, t_2; p) = \dfrac{\eta(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$

– Densidad logarítmica: $\theta_2(t_1, t_2; p) = \dfrac{\varphi_2(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$

d) Tantos instantáneos:

– De descuento: $\delta(t; p) = -\dfrac{\dfrac{\partial A(t; p)}{\partial t}}{A(t; p)}$

– De descuento acumulado: $\upsilon(t; p) = -\dfrac{\partial A(t; p)}{\partial t}$

1.º Para la ley $A(t; p) = 1 - 0{,}07(t - p)$, con $p = t$.

$$v(t+3, t+11; p) = \frac{1 - 0{,}07 \times 11}{1 - 0{,}07 \times 3} = 0{,}2911 \;;\; v^*(t+3, t+11; p) = 3{,}4348$$

$$\varphi_2(t+3, t+11; p) = 1{,}2340 \;;\; d(t+3, t+11; p) = 0{,}7089 \;;$$

$$d^*(t+3, t+11; p) = 2{,}4348$$

$$\eta(t+3, t+11; p) = 0{,}5600 \;;\; \xi(t+3, t+11; p) = 0{,}0886 \;;$$

$$\xi^*(t+3, t+11; p) = 0{,}30435 \;;\; \upsilon(t+3, t+11; p) = 0{,}3043$$

$$\theta_2(t+3,\ t+11;\ p) = 0{,}0700\ ;$$

$$\delta(t+11;\ p) = 0{,}3043\ ;\ \upsilon(t+11;\ p) = 0{,}0700$$

2.º Para la ley $A(t;\ p) = (1+0{,}07)^{-(t-p)}$.

$$v(t+3,\ t+11;\ p) = \frac{(1+0{,}07)^{p-(t+11)}}{(1+0{,}07)^{p-(t+3)}} = (1+0{,}07)^{-8} = 0{,}5820\ ;$$

$$v^*(t+3,\ t+11;\ p) = 1{,}7182$$

$$\varphi_2(t+3,\ t+11;\ p) = 0{,}5413\ ;$$

$$d(t+3,\ t+11;\ p) = 0{,}4180\ ;\ d^*(t+3,\ t+11;\ p) = 0{,}7182$$

$$\eta(t+3,\ t+11;\ p) = 0{,}2343\ ;\ \delta(t+3,\ t+11;\ p) = 0{,}0522\ ;$$

$$\delta^*(t+3,\ t+11;\ p) = 0{,}0898\ ;\ \upsilon(t+3,\ t+11;\ p) = 0{,}0293$$

$$\theta_2(t+3,\ t+11;\ p) = 0{,}0677\ ;\ \delta(t+11;\ p) = 0{,}0677\ ;$$

$$\delta(t+11;\ p) = 0{,}0321$$

N. 13

Calcular las magnitudes derivadas fundamentales asociadas al intervalo ($t_1 = 2$; $t_2 = 8$) con las leyes:

$L_1(t;\ p) = 1 + 0{,}09(p-t)$, con $p = 10$; $L_2(t;\ p) = (1+0{,}09)^{p-t}$ con $p = 10$;

$A_1(t;\ p) = 1 - 0{,}085(t-p)$, con $p = 0$; $A_2(t;\ p) = \dfrac{1}{1+0{,}085(t-p)}$, con $p = 0$;

$A_3(t;\ p) = (1+0{,}085)^{-(t-p)}$, con $p = 0$; tomando para el tanto instantáneo de capitalización el valor $t = 2$ y para el descuento $t = 8$.

Aplicando las fórmulas de los ejercicios N. 12 y N. 13 se tiene:

Magnitudes derivadas capitalización	$L_1(t; p)$	$L_2(t; p)$	Magnitudes derivadas descuento	$A_1(t; p)$	$A_2(t; p)$	$A_3(t; p)$
$u(2, 8; p)$	1,4576	1,6771	$v(2, 8; p)$	0,3855	0,6964	0,6129
$u^*(2, 8; p)$	0,6860	0,5963	$v^*(2, 8; p)$	2,5937	1,4359	1,6315
$\varphi_1(2, 8; p)$	0,3768	0,5171	$\varphi_2(2, 8; p)$	0,9531	0,3618	0,4895
$i(2, 8; p)$	0,4576	0,6771	$d(2, 8; p)$	0,6145	0,3036	0,3871
$i^*(2, 8; p)$	0,3140	0,4037	$d^*(2, 8; p)$	1,5937	0,4559	0,6315
$\xi(2, 8; p)$	0,5400	0,8045	$\eta(2, 8; p)$	0,5100	0,2595	0,3288
$\varrho(2, 8; p)$	0,0763	0,1128	$\delta(2, 8; p)$	0,1024	0,0506	0,0645
$\varrho^*(2, 8; p)$	0,0523	0,0673	$\delta^*(2, 8; p)$	0,2656	0,0726	0,1052
$\mu(2, 8; p)$	0,0900	0,1341	$\upsilon(2, 8; p)$	0,0850	0,0432	0,0548
$\theta_1(2, 8; p)$	0,0628	0,0862	$\theta_2(2, 8; p)$	0,1589	0,0603	0,0816
$\varrho(2; p)$	0,0523	0,0862	$\delta(8; p)$	0,2656	0,0179	0,0816
$\mu(2; p)$	0,0900	0,0452	$\upsilon(8; p)$	0,0850	0,0301	0,0425

N. 14

Calcular las magnitudes derivadas medias asociadas a los intervalos consecutivos del gráfico:

$t_0 = t + 1 \quad t_1 = t + 3 \quad t_2 = t + 6 \quad t_3 = t + 11 \quad t_4 = t + 15 \quad t_5 = t + 20$

con las leyes:

1.º De capitalización, con $p = t + 25$:

$$L_1(t; p) = 1 + 0{,}06(p - t)$$

$$L_2(t; p) = (1 + 0{,}06)^{p-t}$$

2.º De descuento, con $p = t$:

$$A_1(t; p) = 1 - 0{,}04(t - p)$$

$$A_2(t; p) = (1 + 0{,}04)^{-(t-p)}$$

1.º Magnitudes derivadas medias de capitalización:

a) Factores medios:

$$\bar{u} = \sqrt[n]{\prod_{s=1}^{n} u(t_{s-1}, t_s; p)} = \sqrt[n]{u(t_0, t_n; p)} \;\; ; \;\; \bar{u}^* = \frac{1}{\bar{u}}$$

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{\varphi_1(t_0, t_n; p)}{n} = \frac{\sum_{s=1}^{n} \varphi_1(t_{s-1}, t_s; p)}{n} \log_e \bar{u} = -\log_e \bar{u}^*$$

b) Réditos medios:

$$\bar{i} = \bar{u} - 1 \;\; ; \;\; \bar{i}^* = 1 - \bar{u}^* \;\; ; \;\; \bar{\xi} = \frac{\xi(t_0, t_n; p)}{n} = \frac{\sum_{s=1}^{n} \xi(t_{s-1}, t_s; p)}{n}$$

c) Tantos instantáneos medios:

$$\bar{\varrho} = \frac{\varphi_1(t_0, t_n; p)}{t_n - t_0} = \theta_1(t_0, t_n; p) = \frac{\log_e u(t_0, t_n; p)}{t_n - t_0}$$

$$\bar{\mu} = \frac{\xi(t_0, t_n; p)}{t_n - t_0} = \mu(t_0, t_n; p)$$

La aplicación de las fórmulas expuestas en los datos del enunciado da los resultados siguientes:

Magnitudes derivadas	$L_1(t; p) = 1 + 0{,}06(p - t)$	$L_2(t; p) = (1 + 0{,}06)^{p-t}$
$u(t_0, t_1; p) = u(t+1, t+3; t+25)$	1,06250	1,12360
$u(t_1, t_2; p) = u(t+3, t+6; t+25)$	1,10345	1,19102
$u(t_2, t_3; p) = u(t+6, t+11; t+25)$	1,20833	1,33823
$u(t_3, t_4; p) = u(t+11, t+15; t+25)$	1,20000	1,26248
$u(t_4, t_5; p) = u(t+15, t+20; t+25)$	1,33333	1,33823
$u(t_0, t_5; p) = \prod_{s=1}^{5} u(t_{s-1}, t_s; p)$	2,26667	3,02560
$\bar{u}$	1,17782	1,24785
$\bar{u}^*$	0,84903	0,80138
$\bar{\varphi}_1$	0,16366	0,22142
$\bar{i}$	0,17782	0,24785
$\bar{i}^*$	0,15097	0,19862
$\bar{\xi}$	0,22800	0,54214
$\bar{\varrho}$	0,04307	0,05827
$\bar{\mu}$	0,06000	0,14267

2.º Magnitudes derivadas medias de descuento.

a) Factores medios:

$$\bar{v} = \sqrt[n]{\prod_{s=1}^{n} v(t_{s-1}, t_s; p)} = \sqrt[n]{v(t_0, t_n; p)} \quad ; \quad \bar{v}^* = \frac{1}{\bar{v}}$$

$$\bar{\varphi}_2 = -\log_e \bar{v} = \log_e \bar{v}^* = \frac{\varphi_2(t_0, t_n; p)}{n} = \frac{\sum_{s=1}^{n} \varphi_2(t_{s-1}, t_s; p)}{n}$$

b) Réditos medios:

$$\bar{d} = 1 - \bar{v} \ ; \ \bar{d}^{*} = \bar{v}^{*} - 1 \ ; \ \bar{\eta} = \frac{\eta(t_0, t_n; p)}{n} = \frac{\sum_{s=1}^{n} \eta(t_{s-1}, t_s; p)}{n}$$

c) Tantos instantáneos medios:

$$\bar{\delta} = \frac{{}_2(t_0, t_n; p)}{t_n - t_0} = \theta_2(t_0, t_n; p) = - \frac{\log_e v\ (t_0; t_n; p)}{t_n - t_0}$$

$$\bar{\upsilon} = \frac{\eta(t_0, t_n; p)}{t_n - t_0} = \upsilon(t_0, t_n; p)$$

Los valores que corresponden al ejercicio son:

Magnitudes derivadas	$A_1(t; p) = 1 - 0{,}04(t - p)$	$A_2(t; p) = (1 + 0{,}04)^{-(t-p)}$
$V(t_0, t_1; p) = V(t+1, t+3; t)$	0,91667	0,92456
$V(t_1, t_2; p) = V(t+3, t+6; t)$	0,86364	0,88900
$V(t_2, t_3; p) = V(t+6, t+11; t)$	0,73684	0,82193
$V(t_3, t_4; p) = V(t+11, t+15; t)$	0,71429	0,85480
$V(t_4, t_5; p) = V(t+15, t+20; t)$	0,50000	0,82193
$V(t_0, t_5; p) = \prod_{s=1}^{5} V(t_{s-1}, t_s; p)$	0,20833	0,47464
$\bar{v}$	0,73072	0,86154
$\bar{v}^{*}$	1,36851	1,16072
$\bar{\varphi}_2$	0,31372	0,14904
$\bar{d}$	0,26928	0,13846
$\bar{d}^{*}$	0,36851	0,16072
$\bar{\eta}$	0,15200	0,42137
$\bar{\delta}$	0,08256	0,03922
$\bar{\upsilon}$	0,04000	0,11089

N. 15

En una operación financiera con prestación

$$\{(500.000,\ t+1),\ (250.000,\ t+3),\ (100.000,\ t+7)\}$$

y contraprestación

$$\{(600.000,\ t+2),\ (X,\ t+10)\}$$

determinar la cuantía X y la reserva matemática en $t+6$ por los métodos prospectivo y retrospectivo, sabiendo que la ley a utilizar es:

1.° $L(t;p) = 1 + 0{,}06(p-t)$, con $p = t + 11$.

2.° $L(t;p) = (1 + 0{,}06)^{p-t}$.

1.° Con la ley $L(t;p) = 1 + 0{,}06\,(p-t)$ se tiene:

– Cuantía de X.

$$X = 500.000\ \mathrm{u}(t+1,\ t+10;\ t+11) + 250.000\ \mathrm{u}(t+3,\ t+10,\ t+11) +$$

$$+ 100.000\ \mathrm{u}(t+7,\ t+10;\ t+11) - 600.000\ \mathrm{u}(t+2,\ t+10;\ t+11) =$$

$$= 500.000\ \frac{1+0{,}60}{1+0{,}06} + 250.000\ \frac{1+0{,}48}{1+0{,}06} + 100.000\frac{1+0{,}24}{1+0{,}06} -$$

$$- 600.000\ \frac{1+0{,}54}{1+0{,}06} = 349.056{,}60$$

– Reserva en $t+6$ por el método retrospectivo

$$R_{t+6} = 500.000\ \mathrm{u}(t+1,\ t+6;\ t+11) +$$

$$+ 250.000\ \mathrm{u}(t+3,\ t+6;\ t+11) - 600.000\ \mathrm{u}(t+2,\ t+6;\ t+11) =$$

$$= 189.230{,}77$$

– Reserva en $t+6$ por el método prospectivo

$$R_{t+6} = 349.056{,}60\ \mathrm{u}^*(t+6,\ t+10;\ t+11) - 100.000\ \mathrm{u}^*(t+6,\ t+7;\ t+11) =$$

$$= 189.230{,}77$$

2.º Con la ley $L(t; p) = (1 + 0{,}06)^{p-t}$.

Por ser

$$u(t_1, t_2; p) = (1 + 0{,}06)^{t_2 - t_1}$$

se tiene:

$$X = 500.000(1 + 0{,}06)^9 + 250.000(1 + 0{,}06)^7 + 100.000(1 + 0{,}06)^3 -$$
$$- 600.000(1 + 0{,}06)^8 = 383.439{,}82$$

$$R_{t+6} = 500.000(1 + 0{,}06)^5 + 250.000(1 + 0{,}06)^3 - 600.000(1 + 0{,}06)^4 =$$
$$= 209.380{,}62$$

$$R_{t+6} = 383.439{,}82(1 + 0{,}06)^{-4} - 100.000(1 + 0{,}06)^{-1} = 209.380{,}62.$$

N. 16

En una operación definida por:

– Prestación : $\{(100.000, t), (100.000, t + 3), (100.000, t + 7)\}$

– Contraprestación : $\{(200.000, t + 2), (X, t + 9)\}$

si la ley de la operación es:

a) $L_1(t; p) = 1 + 0{,}05(p - t)$ **con** $p = t + 9$.

b) $L_2(t; p) = (1 + 0{,}05)^{p-t}$.

determinar por recurrencia el saldo de la operación un instante después de $t + 2$, de $t + 3$, de $t + 7$ y de $t + 9$ y la cuantía X en función del último saldo.

Con la ley $L_1(t; p) = 1 + 0{,}05(p - t)$ se tiene:

$$R^+_{t+2} = 100.000\ u(t, t + 2; t + 9) - 200.000 = - 92.592{,}59$$

$$R^+_{t+3} = - 92.592{,}59\ u(t + 2, t + 3; t + 9) + 100.000 = 3.846{,}15$$

$$R^+_{t+7} = 3.846{,}15\ \mathrm{u}(t+3,\ t+7;\ t+9) + 100.000 = 104.545{,}45$$

$$R^+_{t+9} = 104.545{,}45\ \mathrm{u}(t+7,\ t+9;\ t+9) - X = 0$$

$$X = 104.545{,}45\ \mathrm{u}(t+7,\ t+9;\ t+9) = 115.000$$

Para la ley $L_2(t;\ p) = (1+0{,}05)^{p-t}$ resulta:

$$R^+_{t+2} = 100.000(1+0{,}05)^2 - 200.000 = -\ 89.750$$

$$R^+_{t+3} = -\ 89.750(1+0{,}05) + 100.000 = 5.762{,}5$$

$$R^+_{t+7} = 5.762{,}5(1+0{,}05)^4 + 100.000 = 107.004{,}35$$

$$R^+_{t+9} = 107.004{,}35(1+0{,}05)^2 - X = 0$$

$$X = 107.004{,}35(1+0{,}05)^2 = 117.972{,}30$$

N. 17

Un inversor dispone de los siguientes capitales:

$$\mathbf{(250.000,\ t+4),\ (100.000,\ t+6),\ (175.000,\ t+8)}$$

si quiere realizar una inversión en un determinado negocio en $t+5$, determinar la cuantía que podrá invertir si se realiza la operación bajo la ley:

a) **$A_1(t;\ p) = 1 - 0{,}055(t-p)$, con $p = t+1$.**

b) **$A_2(t;\ p) = (1+0{,}055)^{-(t-p)}$.**

La cuantía que es posible colocar en $t+5$ es:

$$a)\ C_a = 250.000\,\frac{1-0{,}055(t+4-t-1)}{1-0{,}055(t+5-t-1)} +$$

$$+\,100.000\,\frac{1-0{,}055(t+6-t-1)}{1-0{,}055(t+5-t-1)} +$$

$$+\,175.000\,\frac{1-0{,}055(t+8-t-1)}{1-0{,}055(t+5-t-1)} = 498.557{,}69$$

$$b)\ C_b = 250.000(1+0{,}055) + 100.000(1+0{,}055)^{-1} +$$

$$+\ 175.000(1+0{,}055)^{-3} = 507.569{,}12$$

N. 18

Sabiendo que $\varrho(t;p) = \dfrac{b^2}{b + a(p-t)}$ es el tanto instantáneo de la ley $L(t;p)$ determinar su expresión y las de leyes de descuento prolongada y conjugada.

La expresión de la ley de capitalización es:

$$L(t;p) = e^{\int_t^p \varrho(x;p)\,dx} = e^{\int_t^p \frac{b^2}{b+a(p-x)}\,dx} =$$

$$= e^{\frac{b^2}{a}\log_e\left[1+\frac{a}{b}(p-t)\right]} = \left[1+\frac{a}{b}(p-t)\right]^{\frac{b^2}{a}}$$

por lo que

$$A_1(t;p) = \left[1-\frac{a}{b}(t-p)\right]^{\frac{b^2}{a}}$$

es su ley prolongada y

$$A_2(t;p) = \frac{1}{\left[1+\frac{a}{b}(t-p)\right]^{\frac{b^2}{a}}} = \left[1+\frac{a}{b}(t-p)\right]^{-\frac{b^2}{a}}$$

su conjugada

N. 19

Sabiendo que los capitales (100.000, t) y (120.000, $t+5$) son equivalentes de acuerdo con la ley $L(t;p)$, con $p = t+10$, si el tanto instantáneo es $\varrho(t) = \dfrac{k}{1+k(p-t)}$ obtener:

1.° El parámetro k.

2.º El factor de capitalización para el intervalo (t, $t+3$).

3.º Saldo que presenta la operación al final del intervalo ($t+1$, $t+2$).

La ley de capitalización es:

$$L(t;p) = e^{\int_t^p \frac{k}{1+k(p-x)} dx} = e^{\log_e [1+k(p-t)]} = 1 + k(p-t)$$

y se sigue:

1.º $100.000\,[1+k(t+10-t)] = 120.000\,[1+k(t+10-t-5)]$

$$\Rightarrow k = 0{,}05$$

2.º $$u(t,\ t+3;\ t+10) = \frac{1+0{,}05(t+10-t)}{1+0{,}05(t+10-t-3)} = 1{,}1\hat{1}$$

Al mismo resultado se llega aplicando directamente la relación entre el factor de capitalización y el tanto instantáneo. Esta es:

$$u(t,\ t+3;\ t+10) = e^{\int_t^{t+3} \frac{0{,}05}{1+0{,}05(t+10-t)} dx} = 1{,}1\hat{1}$$

3.º $$R_{t+2} = 100.000\ u(,\ t+2;\ t+10) = 100.000\ \frac{1{,}50}{1{,}40} = 107.142{,}85$$

N. 20

Calcular la ley de descuento $A(t;\ p)$ que tiene por tanto instantáneo:

1.º $\delta(t;\ p) = 0{,}05\ t$.

2.º $\upsilon(t;\ p) = 0{,}03\ t^2 + 0{,}01$.

1.º $$A(t;\ p) = e^{-\int_p^t \delta(x;\ p)\, dx} = e^{-\int_p^t 0{,}05 \times dx} = e^{-0{,}025(t^2-p^2)}$$

2.º $$A(t;\ p) = 1 - \int_p^t \upsilon(x;\ p)\, dx = 1 - \int_p^t (0{,}03\ x^2 + 0{,}01)\, dx =$$

$$= 1 - 0{,}01\,[x^3 + x]_p^t = 1 - 0{,}01\,[(t^3 - p^3) + (t-p)]$$

N. 21

Calcular las cuantías de los intereses pospagables, prepagables y acumulados, así como sus correspondientes valores medios, de un capital de cuantía $C = 500.000$ ptas. en el intervalo $(t_1 = T + 1,\ t_2 = t + 8)$ si la ley financiera de valoración es:

1.º $L_1(t; p) = 1 + 0{,}07(p - t)$. con $p = t + 10$:

2.º $L_2(t; p) = (1 + 0{,}07)^{p-t}$.

3.º $L_3(t; p) = (1 + 0{,}01)^{p(p-t)}$.

Las cuantías de los intereses (totales y medios) de un capital de cuantía C en el intervalo (t_1, t_2) son:

a) Intereses ordinarios, pospagables o referidos a t_2

$$I = C\, i(t_1, t_2; p) \ ; \ \bar{I} = C\, \rho(t_1, t_2; p) = \frac{I}{t_2 - t_1}$$

b) Intereses prepagables, anticipados o referidos a t_1

$$I^* = C\, i^*(t_1, t_2; p) \ ; \ \bar{I}^* = C\, \rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{I^*}{t_2 - t_1}$$

c) Intereses acumulados o referidos a p

$$I_a = C\, \xi(t_1, t_2; p) \ ; \ \bar{I}_a = C\, \mu(t_1, t_2; p) = \frac{I_a}{t_2 - t_1}$$

La aplicación de estas fórmulas a los datos del ejercicio da los siguientes resultados:

Intereses	$L_1(t; p) = 1 + 0{,}07(p - t)$	$L_2(t; p) = (1 + 0{,}07)^{p-t}$	$L_3(t; p) = (1 + 0{,}01)^{p(p-t)}$
$I = 500.000\, i(t+1, t+8; t+10)$	214.912,28	302.890,75	503.381,70
$\bar{I} = \dfrac{I}{t+8-t-1} = \dfrac{I}{7}$	30.701,75	43.270,11	71.911,67
$I^* = 500.000\, i^*(t+1, t+8; t+10)$	150.306,75	188.625,13	250.842,58
$\bar{I}^* = \dfrac{I^*}{7}$	21.472,39	26.946,45	35.834,65
$I_a = 500.000\, \xi(t+1, t+8; t+10)$	245.000,00	346.779,62	614.221,32
$\bar{I}_a = \dfrac{I_a}{7}$	35.000,00	49.539,95	87.745,90

N. 22

Obtener las cuantías de los descuentos (totales y medios) prepagable, pospagable y acumulado, así como sus valores medios, de un capital de cuantía $C = 700.000$ ptas. en el intervalo $(t_1 = t + 2,\ t_2 = t + 6)$ si la ley financiera de valoración es $A(t; p) = 1 - 0{,}08(t - p)$ con $p = t$.

Las cuantías de los descuentos totales y medios son:

a) Descuento ordinario, prepagable o referido a t_1:

$$D = C\, d(t+2,\ t+6;\ t) = 700.000\ \frac{0{,}32}{0{,}84} = 273.170{,}73\ ;$$

$$\bar{D} = \frac{D}{4} = 68.292{,}68$$

b) Descuento pospagable, diferido o referido a t_2.

$$D^* = C\, d^*(t+2,\ t+6;\ t) = 700.000\ \frac{0{,}32}{0{,}52} = 430.769{,}23\ ;$$

$$\bar{D}^* = \frac{D^*}{4} = 107.692{,}31$$

c) Descuento acumulado o referido a *p*.

$$D_a = C\, \eta(t+2,\ t+6;\ t) = 700.000 \times 0{,}32 = 224.000\ ;$$

$$\bar{D}_a = \frac{D_a}{4} = 56.000$$

N. 23

Clasificar los siguientes sistemas financieros:

1.º De capitalización:

***a*)** $L_1(t; p) = 1 + a(p - t) + a(p^2 - t^2)\ ;\ a > 0.$

***b*)** $L_2(t; p) = e^{b(p^2 - t^2) + b(p - t)},\ b > 0.$

***c*)** $L_3(t; p) = 1 + a(p - t) + b(p - t)^2,\ a > 0,\ b > 0.$

d) $L_4(t;p) = (1+\alpha)^{p(p-t)}$, $\alpha > 0$.

e) $L_5(t;p) = p^2 - p(t-1) - t + 1$.

2.° De descuento:

a) $A_1(t;p) = (1-d)^{t-p}$, $d > 0$.

b) $A_2(t;p) = 1 - k(t^3 - p^3)$, $k > 0$.

c) $A_3(t;p) = (1+k)^{p-t}\, a^{H(p-t)}$, $k > 0$, $H > 0$, $a > 0$.

Se trata de determinar si los anteriores sistemas financieros son estacionarios, o sumativos, o multiplicativos, o unificables o pertenecientes a otro tipo. Para ello basta comprobar si satisfacen las condiciones necesarias y suficientes que se exponen:

Sistema financiero	Condición necesaria y suficiente Capitalización	 Descuento
Estacionario (*e*)	$\dfrac{\partial L(t;p)}{\partial t} + \dfrac{L(t;p)}{\partial p} = 0$	$\dfrac{\partial A(t;p)}{\partial t} + \dfrac{\partial A(t;p)}{\partial p} = 0$
Simplemente sumativo (s.s.)	$\mu(t;p) = \varphi(t)$	$\upsilon(t;p) = \varphi(t)$
Ampliamente sumativo (a.s.)	e. y s.s. a la vez, ó $\mu(t;p) =$ constante	(e.) y s.s. a la vez, ó $\upsilon(t;p) =$ constante
Simplemente multiplicativo (s.m.)	$\varrho(t;p) = \varphi(t)$	$\delta(t;p) = \varphi(t)$
Ampliamente multiplicativo (a.m.)	e. y s.m. a la vez ó $\varrho(t;p) =$ constante	e. y s.m. a la vez, ó $\delta(t;p) =$ constante
Simplemente unificable (s.u.)	$W\left[\dfrac{\delta L(t;p)}{\delta t};\dfrac{\delta^2 L(t;p)}{\delta t^2}\right] = \begin{vmatrix} \dfrac{\delta L(t;p)}{\delta t} ; & \dfrac{\delta^2 L(t;p)}{\delta t^2} \\ \dfrac{\delta^2 L(t;p)}{\delta t\,\delta p} ; & \dfrac{\delta^3 L(t;p)}{\delta t^2\,\delta p} \end{vmatrix} = 0$	$W_p\left[\dfrac{\delta A(t;p)}{\delta t};\dfrac{\delta^2 A(t;p)}{\delta t^2}\right] = 0$
Ampliamente unificable (a.u.)	e. y s.u. a la vez	e. y s.u. a la vez

1.º Sistemas de capitalización:

a) $L_1(t; p) = 1 + a(p - t) + a(p^2 - t^2)$ es simplemente sumativo y simplemente unificable, ya que:

$$\mu(t; p) = -\frac{\partial L_1(t; p)}{\partial t} = 2at + a = \varphi(t)$$

$$W_p\left[\frac{\partial L_1(t; p)}{\partial t} \; ; \; \frac{\partial^2 L_1(t; p)}{\partial t^2}\right] = \begin{vmatrix} -(2at + a) & -2a \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

b) $L_2(t; p) = e^{b(p^2 - t^2) + b(p - t)}$ es simplemente multiplicativo y simplemente unificable, pues:

$$\varrho(t; p) = -\frac{\dfrac{\partial L_2(t; p)}{\partial t}}{L_2(t; p)} = 2bt + b = \varphi(t)$$

$$W_p\left[\frac{\partial L_2(t; p)}{\partial t} \; ; \; \frac{\partial^2 L_2(t; p)}{\partial t^2}\right] =$$

$$= [L_2(t; p)]^2 \, (2bt + b) \, [(2bt + b)^2 - 2b] \, (2bp + b) \, (-1 + 1) = 0$$

c) $L_3(t; p) = 1 + a(p - t) + b(p - t)^2$ es un sistema estacionario, al ser:

$$\frac{\partial L_3(t; p)}{\partial t} + \frac{\partial L_3(t; p)}{\partial p} = [-a - 2b(p - t)] + [a + 2b(p - t)] = 0$$

y puede ser expresado por $L_3(0; z) = 1 + az + bz^2$, con $z = p - t$.

d) $L_4(t; p) = (1 + \alpha)^{p(p - t)}$ es un sistema financiero de capitalización que no es estacionario, ni sumativo, ni multiplicativo, ni unificable por verificarse:

$$\frac{\partial L_4(t; p)}{\partial t} + \frac{\partial L_4(t; p)}{\partial p} = (1 + \alpha)^{p(p - t)} \, (p - t) \log_e (1 + \alpha) \neq 0$$

$$\mu(t;p) = (1+\alpha)^{p(p-t)}\, p \log_e(1+\alpha) = \varphi(t;p)$$

$$\varrho(t;p) = p \log_e(1+\alpha) = \varphi(p)$$

$$W_p\left[\frac{\partial L_4(t;p)}{\partial t}\ ;\ \frac{\partial^2 L_4(t;p)}{\partial t^2}\right] \neq 0$$

e) $L_5(t;p) = p^2 - p(t-1) - t + 1$ es un sistema simplemente unificable por cumplirse que:

$$W_p\left[\frac{\partial L_5(t;p)}{\partial t}\ ;\ \frac{\partial^2 L_5(t;p)}{\partial t^2}\right] = \begin{vmatrix} -p-1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

2.° Sistemas de descuento:

a) $A_1(t;p) = (1-d)^{t-p}$ es un sistema financiero estacionario, ampliamente multiplicativo y ampliamente unificable por verificar:

$$\frac{\partial A_1(t;p)}{\partial t} + \frac{\partial A_1(t;p)}{\partial p} = (1-d)^{t-p} \log_e(1-d) \cdot (1-1) = 0$$

$$\delta(t;p) = -\log_e(1-d)$$

$$W_p\left[\frac{\partial A_1(t;p)}{\partial t}\ ;\ \frac{\partial^2 A_1(t;p)}{\partial t^2}\right] = (1-d)^{2(t-p)} \log_e^4(1-d) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

b) $A_2(t;p) = 1 - k(t^3 - p^3)$ es simplemente sumativo y simplemente unificable, ya que:

$$\upsilon(t;p) = 3kt^2 = \varphi(t)$$

$$W_p\left[\frac{\partial A_2(t;p)}{\partial t}\ ;\ \frac{\partial^2 A_2(t;p)}{\partial t^2}\right] = \begin{vmatrix} -3kt^2 & -6kt \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

c) $A_3(t;p) = (1+k)^{p-t}\, a^{H(p-t)}$ es estacionario por poderse expresar en función de $z = t - p$ por:

$$A_3(z;0) = (1+k)^{-z}\, a^{-Hz}$$

y además es ampliamente multiplicativo y unificable por cumplirse que:

$$\delta(t;\, p) = H \log_e a + \log_e (1 + k)$$

$$W_p \left[\frac{\partial A_3(t;\, p)}{\partial t} \;;\; \frac{\partial^2 A_3(t;\, p)}{\partial p} \right] =$$

$$= (1 + k)^{p-t}\, a^{H(p-t)}\, [\log_e (1 + k) + H \log_e a]^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

N. 24

Sabiendo que $\upsilon(t;\, p) = kt + b$ es el tanto instantáneo acumulado de una ley financiera de descuento determinar la expresión analítica de la ley y el tipo de sistema al que pertenece ésta.

La ley es:

$$A(t;\, p) = 1 - \int_p^t \upsilon(x;\, p)\, dx = 1 - \int_p^t (kx + b)\, dx =$$

$$= 1 - \frac{k}{2}(t^2 - p^2) - b(t - p)$$

y pertenece a un sistema simplemente sumativo de descuento, pues el tanto instantáneo acumulado es función de solamente la variable *t*.

N. 25

Obtener la expresión de la ley de capitalización estacionaria cuyo tanto instantáneo es directamente proporcional a la amplitud del intervalo de aplicación de dicha ley.

Siendo *k* una constante y $z = p - t$, el tanto instantáneo es:

$$\rho(0;\, z) = kz$$

por lo que se sigue

$$L(0;\, z) = e^{\int_0^z \rho(0;\, x)\, dx} = e^{\int_0^z k \times dx} = e^{\frac{k}{2} z^2} = e^{\frac{k}{3}(p-t)^2} = L(t;\, p)$$

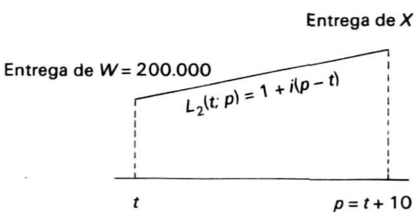
N. 26

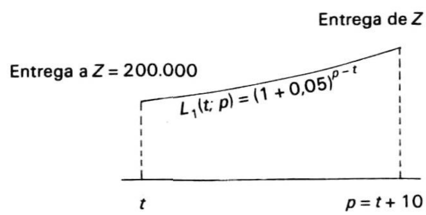
Un inversor X efectúa una doble operación financiera simultánea. Presta 200.000 ptas., en este momento, al inversor Z y éste le devolverá su equivalente dentro de diez años, de acuerdo con la ley $L_1(t; p) = (1 + 0{,}05)^{p-t}$; por otra parte, recibe en préstamo la misma cuantía de 200.000 ptas. de un inversor W para también devolverle, dentro de diez años, la cuantía que corresponde con la ley $L_2(t; p) = 1 + i(p - t)$, con $p = t + 10$. Se pide:

1.° Valor de i para que al finalizar ambas operaciones las dos contraprestaciones sean idénticas.

2.° Si X pretendiese obtener un beneficio de 10.000 pts. en la doble operación, ¿cuál sería el valor de i?

1.° Los esquemas de las operaciones concertadas son:





y en p debe verificarse:

$$\text{Entrega de } Z = 200.000\,(1 + 0{,}05)^{t+10-t} =$$
$$= 200.000\,[1 + i(t + 10 - t)] = \text{Entrega de } X,$$

por lo que

$$i = \frac{(1 + 0{,}05)^{10} - 1}{10} = 0{,}06289$$

2.° Para obtener X un beneficio de 10.000 pts. debe ser:

$$200.000(1 + 0{,}05)^{10} = 200.000(1 + 10i) + 10.000$$

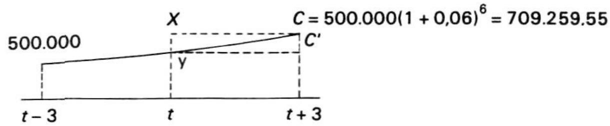
y resulta

$$i = 0{,}05789$$

N. 27

Hace tres años entregó un Sr. A, a otro B. 500.000 ptas. para recibir su equivalente a los seis años de comenzada la operación, bajo la ley $L(t; p) = (1 + 0{,}06)^{p-t}$. En el momento actual el prestatario quiere cancelar la operación, si en el mercado se actúa hoy bajo la ley $L(t; p) = (1 + 0{,}05)^{p-t}$ determinar la cantidad a exigir por el prestamista para rescindir la operación desglosándola en sus componentes saldo financiero e indemnización.

La operación queda recogida en el siguiente gráfico:



En el momento t, la reserva es:

$$y = 500.000(1 + 0{,}06)^3 = 595.508$$

pero si la operación fuese cancelada percibiendo solamente la reserva y se reinvirtiese ésta con las nuevas condiciones del mercado, el nivel a que podría llegarse es,

$$C' = 500.000(1 + 0{,}06)^3(1 + 0{,}05)^3 = 689.374{,}95 < 709.259{,}55 = C$$

El prestamista estará dispuesto a rescindir la operación a cambio de una cantidad X tal que colocada en el mercado en las condiciones actuales, le permita alcanzar el mismo resultado que en la operación inicial, es decir,

$$X = 709.259{,}55(1 + 0{,}05)^{-3} = 612.686{,}30$$

y su descomposición es:

a) Saldo financiero

$$Y = 595.508$$

b) Indemnización

$$I = X - Y = 17.178{,}30$$

N. 28

Tres letras de cambio de nominales C_1, C_2 y C_3 cuyos vencimientos son $t + 4$, $t + 5$ y $t + 6$ respectivamente, son descontadas en base a la ley $A(t; p) = 1 - d(t - p)$ con $p = t$, a parámetros $d_1 = 0{,}04$, $d_2 = 0{,}05$ y $d_3 = 0{,}06$. Si el valor descontado de los tres efectos es el mismo, y la suma de sus nominales asciende a 100.000 pts. determinar, los nominales de las letras y los descuentos efectuados.

El valor descontado de cada uno de los efectos es:

$$V = C_1\ [1 - 0{,}04(t + 4 - t)] = 0{,}84\ C_1$$

$$V = C_2\ [1 - 0{,}05(t + 5 - t)] = 0{,}75\ C_2$$

$$V = C_3\ [1 - 0{,}06(t + 6 - t)] = 0{,}64\ C_3$$

y al ser

$$C_1 + C_2 + C_3 = 100.000$$

la solución es:

$$C_1 = 29.133{,}29\ ;\ C_2 = 32.629{,}28\ ;\ C_3 = 38.237{,}43\ ;\ V = 24.471{,}96$$

Los descuentos efectuados son:

$$D_1 = C_1 - V = 4.661{,}33\ ;\ D_2 = C_2 - V = 8.157{,}32\ ;$$

$$D_3 = C_3 - V = 13.765{,}47$$

N. 29

Si para un periodo menor que el año se emplea $L_1(0; z) = 1 + 0,\ 10\ z$ como valor aproximado de $L_2(0; z) = (1 + 0{,}10)^z$ determinar:

1.º El tipo de error que se comete y obtener una cota máxima de dicho error.

2.º ¿En qué punto la diferencia entre L_1 y L_2 es máxima?

1.º Para $0 < z < 1$ la diferencia entre $L_1(0; z)$ y $L_2(0; z)$ es:

$$L_1(0; z) - L_2(0; z) = \frac{z(1 - z)\,(1 + 0{,}10\theta)^{z-2}}{2}\,0{,}10^2 > 0$$

es decir, se comete un error por exceso y una cota superior de éste es:

$$L_1\,(0; z) - L_2\,(0; z) < \frac{z\,(1 - z)}{2}\,0{,}10^2 \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2}\,0{,}10^2 = 0{,}00125$$

2.º El valor de z en el que la diferencia entre L_1 y L_2 es máxima, es el que resulta de maximizar la función:

$$\varphi(z) = 1 + 0{,}10\,z - (1 + 0{,}10)^z$$

De

$$\varphi'(z) = 0{,}10 - (1 + 0{,}10)^z \log_e (1 + 0{,}10) = 0$$

$$\varphi''(z) = -\,(1 + 0{,}10)^z \log_e^2 (1 + 0{,}06) < 0$$

se sigue que el valor de z para la solución de máximo es:

$$z = \frac{\log_e \dfrac{0{,}10}{\log_e (1 + 0{,}10)}}{\log_e (1 + 0{,}10)} = 0{,}50397$$

y el de la función:

$$\varphi(0{,}50397) = 0{,}00119$$

N. 30

Dados los capitales (200.000, $t + 2$), (200.000, $t + 4$) y (500.000, $t + 8$), obtener el capital unificado (C, τ) en base a la ley $L(t; p) = 1 + i\,(p - t)$.

El único capital que satisface la unificación con la ley de capitalización simple es la denominada solución media. Para n capitales (C_1, t_1), $(C_2, t_2), \ldots\ldots, (C_n, t_n)$ el unificado (C, τ) es:

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s \; ; \qquad \tau = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s\, t_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s}$$

y aplicando estas fórmulas a los datos del enunciado resulta:

$$C = 200.000 + 200.000 + 500.000 = 900.000$$

$$\tau = \frac{200.000\,(t+2) + 200.000\,(t+4) + 500.000\,(t+8)}{900.000} = t + \frac{52}{9}$$

N. 31

Calcular el capital unificado (C, τ) de los capitales del ejercicio anterior con la ley $L(t; p) = (1 + 0{,}08)^{p-t}$ para los supuestos:

1.º $\tau = t$, $\tau = t + 5$ y $\tau = t + 10$

2.º $C = 700.000$, $C = 900.000$, $C = 100.000$

En capitalización compuesta existen infinitas soluciones de unificación como se pone de relieve en la ecuación:

$$\sum_{s=1}^{n} C_s\,(1+i)^{-t_s} = C\,(1+i)^{-\tau}$$

que no depende de p.

Elegido C el vencimiento queda determinado por la expresión:

$$\tau = \frac{\log_e C - \log_e \sum_{s=1}^{n} C_s\,(1+i)^{-t_s}}{\log_e (1+i)}$$

y fijado τ la solución de C es:

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s \, (1 + i)^{\tau - t_s}$$

La aplicación de las fórmulas en el ejercicio, da las siguientes soluciones:

Fijado τ	Solución de C	Fijado C	Solución de τ
$\tau = t$	$C =$ 588.608,17	$C = 700.000 < \sum C_s$	$\tau = t + 1{,}6370$
$\tau = t + 5$	$C =$ 864.858,53	$C = 900.000 = \sum C_s$	$\tau = t + 4{,}9025$
$\tau = t + 10$	$C =$ 1.270.760,90	$C = 1.000.000 > \sum C_s$	$\tau = t + 6{,}2715$

N. 32

Con los datos del ejercicio anterior y para los mismos supuestos calcular el capital unificado (C, τ) si la ley es $A(t; p) = (1 - 0{,}07)^{t-p}$.

La ecuación de unificación o concentración

$$\sum_{s=1}^{n} C_s \, (1 - d)^{t_s} = C \, (1 - d)^{\tau}$$

también tiene infinitas soluciones. Fijado τ es $C = \sum_{s=1}^{n} C_s \, (1 - d)^{t_s - \tau}$

y elegido C resulta $\tau = \dfrac{\log_e C - \log_e \sum_{s=1}^{n} C_s \, (1 - d)^{-t_s}}{- \log_e (1 - d)}$

Con los datos del ejercicio se tiene:

Fijado τ	Solución de C	Fijado C	Solución de τ
$\tau = t$	$C =$ 602.381,31	$C =$ 700.000	$\tau = t + 2{,}07$
$\tau = t + 5$	$C =$ 865.878,08	$C =$ 900.000	$\tau = t + 5{,}53$
$\tau = t + 10$	$C =$ 1.244.634,97	$C =$ 1.000.000	$\tau = t + 6{,}98$

N. 33

Dados los capitales (100.000, t) , (50.000, $t+2$) y (200.000, $t+6$) determinar el capital unificado (C, τ) si la ley a utilizar es $A(t;\, p) = 1 - d(t-p)$.

Se trata de obtener la solución media

$$C = \sum_{s=1}^{n} C_s \;; \qquad \tau = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s\, t_s}{\sum_{s=1}^{n} C_s}$$

por lo que sustituyendo valores se tiene:

$$C = 100.000 + 50.000 + 200.000 = 350.000$$

$$\tau = \frac{100.000\, t + 50.000\,(t+2) + 200.000\,(t+6)}{350.000} = t + 4$$

N. 34

Definir la ley producto de las leyes $L_1(t;\, p_1) = \dfrac{p_1 + 0{,}10}{t + 0{,}10}$ y $L_2(t;\, p_2) = (1 + 0{,}08)^{p_2 - t}$ con $p_1 = 6$ y $p_2 = 12$.

La ley que se obtiene es:

$$\mathscr{L}(t;\, p_2) = \mathscr{L}(t;\, 12) = \begin{cases} L_1(t;\, 6) \cdot L_2(6;\, 12) = \dfrac{6 + 0{,}10}{t + 0{,}10}\,(1 + 0{,}08)^6 \,, \\ \qquad \text{para } 0 \leqslant t \leqslant 6 \\ L_2(t;\, 12) = (1 + 0{,}08)^{12 - t} \,, \quad \text{para } 6 \leqslant t \leqslant 12 \end{cases}$$

N. 35

Obtener la expresión de la ley generada por el producto de $A_1(t; p_0) = 1 - (e^t - e^{p_0})$ y $A_2(t; p_1) = 1 - 0,05\ (t - p_1)$, para $p_0 = 1$ y $p_1 = 5$.

El resultado es:

$$\mathscr{A}(t; p_0) = \mathscr{A}(t; 1) = \begin{cases} A_1(5; 1) . A_2(t; 5) = [1 - (e^5 - e)]\ [1 - 0,05\ (t - 5)]\ , \\ \qquad\qquad \text{si } 5 \leqslant t \\ A_1(t; 1) = 1 - (e^t - e)\ , \ \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 5 \end{cases}$$

N. 36

Obtener el proceso de capitalización generado por los sistemas $L_1(t; p_1) = 1 + (p_1^3 - t^3)$, $L_2(t; p_2) = 1 + 0,01\ (p_2^2 - t^2) + 0,01\ (p_2 - t)$, $L_3\ (t; p_3) = \dfrac{p_3 + 0,04}{t + 0,04}$ y $L_4(t; p_4) = (1 + 0,003)^{p_4^2 - t^2}$, con $p_1 = 4$, $p_2 = 7$, $p_3 = 12$ y $p_4 = 15$, para los supuestos:

1.° $0 \leqslant t \leqslant p_1 = 4$
2.° $4 \leqslant t \leqslant p_2 = 7$
3.° $7 \leqslant t \leqslant p_3 = 12$
4.° $12 \leqslant t \leqslant p_4 = 15$.

El sistema financiero que se genera aplicable en el intervalo $[t, p_n]$ con los sistemas de capitalización $L_1(t; p_1)$, $L_2(t; p_2)$, ..., $L_n\ (t\ p_n)$ es:

$$\mathscr{L}(t; p_n) = \begin{cases} L_1(t; p_1) \prod\limits_{s=1}^{n} L_s(p_{s-1} ; p_s) \quad , \quad \text{si } t \leqslant p_1 \\ L_r(t; p_r) \prod\limits_{s=r+1}^{n} L_s(p_{s-1} ; p_s) \quad , \quad \text{si } p_{r-1} \leqslant t \leqslant p_r \end{cases}$$

En consecuencia, los sistemas del enunciado generan el proceso:

1.° Para $0 \leqslant t \leqslant p_1 = 4$

$$\mathscr{L}(t; p_4) = \mathscr{L}\ (t; 15) = L_1(t; 4) . L_2(4; 7)\ L_3(7; 12)\ L_4(12; 15) =$$

$$= 2,964615\ \left[1 + (64 + t^3)\right]$$

2.º Para $4 \leqslant t \leqslant p_2 = 7$.

$$\mathscr{L}(t; 15) = L_2(t; 7)\, L_3(7; 12)\, L_4(12; 15) =$$

$$= 2{,}179864 \left[1 + 0{,}01\,(49 - t^2) + 0{,}01\,(7 - t)\right]$$

3.º Para $7 \leqslant t \leqslant p_3 = 12$

$$\mathscr{L}(t; 15) = L_3\,(t; 12) L_4(12; 15) = 1{,}274605\,\frac{12 + 0{,}04}{t + 0{,}04}$$

4.º Para $12 \leqslant t \leqslant p_4 = 15$.

$$\mathscr{L}(t; 15) = L_4(t; 15) = (1 + 0{,}003)^{15^2 - t^2}$$

N. 37

En base a las leyes $A_1(t; p_0) = (1 - 0{,}08)^{t - p_0}$, $A_2(t; p_1) = 1 - 0{,}0005$ $(t^3 - p_2^3)$ y $A_3(t; p_2) = \dfrac{1}{1 + 0{,}06\,(t - p_2)}$, siendo $p_0 = 1$, $p_1 = 6$ y $t_2 = 10$ obtenerse el proceso de descuento correspondiente para los supuestos:

1.º $p_2 = 10 < t$

2.º $p_1 = 6 < t \leqslant 10 = p_2$

3.º $p_0 = 1 < t \leqslant 6 = p_1$

Las funciones de descuento $A_1(t; p_0)$, $A_2(t; p_1)$, ..., $A_n(t; p_n)$ aplicables en el intervalo $[p_0, t]$ engendran en p_0 el proceso:

$$\mathscr{A}(t; p_0) = \begin{cases} A_n(t; p_{n-1}) \displaystyle\prod_{s=1}^{n-1} A_s(p_s; p_{s-1}) \ , \ \text{para } p_{n-1} \leqslant t \leqslant p_n \\ \\ A_r(t; p_{r-1}) \displaystyle\prod_{s=1}^{r-1} A_s(p_s\,; p_{s-1}) \ , \ \text{para } p_{r-1} \leqslant t \leqslant p_r \end{cases}$$

Por tanto se tiene:

1.° Para $p_2 = 10 < t$

$$\mathscr{A}(t; p_0) = \mathscr{A}(t; 1) = (1 - 0{,}08)^5 \left[1 - 0{,}0005\,(10^3 - 6^3)\right] \frac{1}{1 + 0{,}06\,(t - 10)} =$$

$$= \frac{0{,}400722}{1 + 0{,}06\,(t - 10)}$$

2.° Para $p_1 = 6 < t \leqslant 10$

$$\mathscr{A}(t; 1) = (1 - 0{,}08)^5 \left[1 - 0{,}0005\,(t^3 - 6^3)\right] =$$
$$= 0{,}659082 \left[1 - 0{,}0005\,(t^3 - 6^3)\right]$$

3.° Para $p_0 = 1 < t \leqslant 6$

$$\mathscr{A}(t; 1) = (1 - 0{,}08)^{t-1}$$

N. 38

Obtener el proceso estacionario y uniforme generado por el sistema $L(0; z) = 1 + 0{,}09\,z$ para periodos $z_0 = 2$, $z'_0 = 3$ y $z''_0 = 4$ en el supuesto $z = z_0 n + z_0 \theta$ y comienzo del proceso en el origen del periodo. Calcular los valores para $z = 17$ y para $z = 12$.

Los resultados son:

$$\mathscr{L}(0; z) = (1 + 0{,}09\,z_0)^n\,(1 + 0{,}09\,\theta\,z_0) = (1 + 0{,}18)^n\,(1 + 0{,}18\,\theta)$$

$$\mathscr{L}'(0; z) = (1 + 0{,}09\,z'_0)^{n'}\,(1 + 0{,}09\,\theta'\,z'_0) = (1 + 0{,}27)^{n'}\,(1 + 0{,}27\,\theta')$$

$$\mathscr{L}''(0; z) = (1 + 0{,}09\,z''_0)^{n''}\,(1 + 0{,}09\,\theta''\,z''_0) = (1 + 0{,}36)^{n''}\,(1 + 0{,}36\,\theta'')$$

Para $z = 17$ se tiene:

$$\mathscr{L}(0; z) = (1 + 0{,}18)^8\,(1 + 0{,}18\,\frac{1}{2}) = 4{,}097157$$

$$\mathscr{L}'(0; z) = (1 + 0{,}27)^5\,(1 + 0{,}27\,\frac{2}{3}) = 3{,}899528$$

$$\mathscr{L}''(0; z) = (1 + 0{,}36)^4\,(1 + 0{,}36\,\frac{1}{4}) = 3{,}728912$$

Para $z = 12$ se obtiene:

$$\mathscr{L}(0; z) = (1 + 0{,}18)^6 = 2{,}699554 \ ; \ L'(0; z) = (1 + 0{,}27)^4 = 2{,}601446 \ ;$$

$$\mathscr{L}''(0; z) = (1 + 0{,}36)^3 = 2{,}515456$$

N. 39

Calcular el tanto efectivo anual i correspondiente al nominal $j_{(m)} =$ $= 0{,}12$ para $m = 1, 2, 3, 4, 6$ y 12.

Por aplicación de la fórmula

$$i = \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m} \right)^m - 1$$

resulta:

$$i = \left(1 + \frac{0{,}12}{1} \right)^1 - 1 = 0{,}1200 \ ; \ i = 1 + \left(\frac{0{,}12}{2} \right)^2 - 1 = 0{,}1236 \ ;$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}12}{3} \right)^3 - 1 = 0{,}1249 \ ; \ i = \left(1 + \frac{0{,}12}{4} \right)^4 - 1 = 0{,}1255 \ ;$$

$$i = \left(1 + \frac{0{,}12}{6} \right)^6 - 1 = 0{,}1262 \ ; \ i = \left(1 + \frac{0{,}12}{12} \right)^{12} - 1 = 0{,}1268$$

Obsérvese que i crece con m.

N. 40

Siendo $i = 0{,}15$ obtener $j_{(m)}$ para los mismos valores de m del ejercicio anterior.

De $j_{(m)} = m \left[(1 + i)^{1/m} - 1 \right]$ se sigue:

$$j_{(1)} = 1 \left[(1 + 0{,}12)^{1/1} - 1 \right] = 0{,}1200 \quad j_{(2)} = 2 \left[(1 + 0{,}12)^{1/2} - 1 \right] = 0{,}1166$$

$$j_{(3)} = 3 \left[(1 + 0{,}12)^{1/3} - 1 \right] = 0{,}1155 \quad j_{(4)} = 4\left[(1 + 0{,}12)^{1/4} - 1 \right] = 0{,}1149$$

$$j_{(6)} = 6\left[(1 + 0{,}12)^{1/6} - 1 \right] = 0{,}1144 \quad j_{(12)} = 12 \left[(1 + 0{,}12)^{1/12} - 1 \right] = 0{,}1139$$

Nótese que $j_{(m)}$ decrece con m.

N. 41

Siendo $i^{(6)}$ el rédito bimestral constante de una ley de capitalización, determinar:

a) Las expresiones de los tantos nominal y efectivo anual.

b) Los réditos semestral, $i^{(2)}$, trimestral $i^{(4)}$, y cuatrimestral $i^{(3)}$

a) Los tantos nominal y efectivo anual son:

$$j_{(6)} = 6\, i^{(6)} \quad ; \quad i = (1 + i^{(6)})^6 - 1$$

b) De la relación entre réditos

$$(1 + i^{(6)})^6 = (1 + i^{(4)})^4 = (1 + i^{(3)})^3 = (1 + i^{(2)})^2$$

se sigue:

$$i^{(4)} = (1 + i^{(6)})^{3/2} - 1 \quad ; \quad i^{(3)} = (1 + i^{(6)})^2 - 1 \quad ; \quad i^{(2)} = (1 + i^{(2)})^3 - 1$$

N. 42

Determinar los intereses que se percibirán al final de cada semestre de una obligación cuyo nominal es 1.000 ptas., sabiendo que el tanto efectivo anual es el 6,5 %.

Para calcular la cuantía de los intereses que se perciben en cada semestre hay que determinar el rédito semestral correspondiente al tanto efectivo anual que es

$$i^{(2)} = \sqrt{1 + 0{,}065} - 1 = 0{,}3198$$

y la cuantía de los intereses asciende a

$$I^{(2)} = C.i^{(2)} = 10.000 \times 0{,}03198 = 31{,}98 \text{ ptas.}$$

N. 43

Sabiendo que i es el rédito anual constante de la ley financiera $L(t;\,p)$ obtener el rédito de descuento semestral de la correspondiente función de descuento conjugada de la de capitalización.

Por ser el rédito anual constante es

$$L(t;\,p) = (1+i)^{p-t}$$

y tiene por ley conjugada

$$A(t;\,p) = (1-d)^{t-p} = (1+i)^{-(t-p)}$$

siendo d el rédito de descuento anual.

El rédito de descuento semestral $d^{(2)}$ y el anual están relacionados por la ecuación

$$1-d = (1-d^{(2)})^2$$

despejando

$$d^{(2)} = 1-\sqrt{1-d}$$

pero por ser

$$1-d = (1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i}$$

sustituyendo en $d^{(2)}$ se tiene la expresión pedida, que es

$$d^{(2)} = 1-\sqrt{\frac{1}{1+i}}$$

N. 44

Sabiendo que un capital de cuantía C, impuesto en una entidad bancaria que capitaliza semestralmente, al cabo de 20 años ha constituido un montante de cuantía $3C$, obtener razonadamente las expresiones de:

***a*) El tanto efectivo anual.**

b) El tanto nominal anual

c) El rédito semestral constante.

El tanto efectivo anual i verifica que:

$$C\,(1+i)^{20} = 3\,C \Longrightarrow (1+i)^{20} = 3$$

y en consecuencia

$$i = 3^{1/20} - 1 = 0{,}056467$$

El tanto nominal anual frecuencia dos es

$$j_{(2)} = 2\left[\sqrt{1+0{,}056467} - 1\right] = 0{,}055692$$

y el rédito semestral

$$i^{(2)} = \frac{j_{(2)}}{2} = 0{,}027846$$

N. 45

Sabiendo que dos capitales de la misma cuantía C son impuestos en dos entidades bancarias durante 10 y 12 años, respectivamente, obteniéndose por ambos el mismo montante, si la primera entidad capitaliza a rédito anual constante $i = 0{,}06$ y la segunda a rédito semestral constante $i^{(2)}$, determinar éste. ¿Cuál debería ser el rédito semestral constante de la segunda entidad para que el segundo montante fuera un 20 % superior al primero?

Por ser el montante que se forma de la misma cuantía se verifica

$$C\,(1+0{,}06)^{10} = C\left[(1+i^{(2)})^2\right]^{12}$$

luego

$$i^{(2)} = (1+0{,}06)^{5/12} - 1 = 0{,}024576$$

Si el montante segundo fuese un veinte por ciento superior al primero resultaría

$$C\,(1+0{,}06)^{10} + 0{,}20\,C\,(1+0{,}06)^{10} = C\left[(1+i^{(2)})^2\right]^{12}$$

es decir

$$(1 + i^{(2)})^{24} = 1{,}20\ (1 + 0{,}06)^{10} = 2{,}14901724$$

y en consecuencia:

$$i^{(2)} = 2{,}14901724^{1/24} - 1 = 0{,}032389$$

SEGUNDA PARTE

RENTAS

SUPUESTOS DE RENTAS

N. 1

Calcular el valor actual de una renta pospagable de 10.000 ptas. anuales, a percibir durante diez años, siendo el tanto de valoración el 4,5 % anual.

El problema consistirá en determinar el valor actual de una renta constante y pospagable, tal como nos indica el siguiente gráfico:

El valor actual de una renta de este tipo es:

$$V_0 = c\, a_{\overline{n}|i}$$

y aplicado a los datos del ejercicio resulta:

$$V_0 = 10.000\; a_{\overline{10}|0,045} = 10.000 \times 7,91271818 = 79.127,18$$

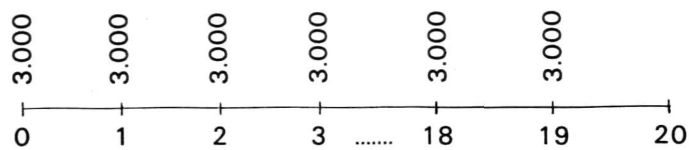
El valor $a_{\overline{10}|0,045} = \dfrac{1-(1+0,045)^{-10}}{0,045} = 7,91271818$ se puede obtener

por cálculo directo o por tablas financieras. Estas dan los valores de $a_{\overline{n}|i}$ para el par (n, i).

N. 2

Calcular el valor actual de una renta prepagable de término 3.000 ptas., duración 20 años si el tanto de valoración es de 5 %.

Se trata de calcular el valor financiero en este momento de la renta constante y prepagable, que indica el esquema:



El valor de esta renta asciende a:

$$V = c\,\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 3.000\,\ddot{a}_{\overline{20}|0{,}05} = 3.000\,(a_{\overline{19}|0{,}05} + 1) =$$

$$= 3.000 \times 13{,}0853 = 39.255{,}9 \text{ ptas.}$$

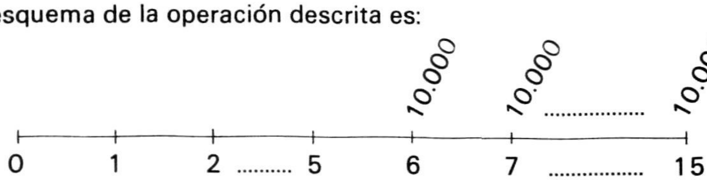
ya que hay que expresar la renta prepagable en función de la pospagable que es la que viene tabulada y su relación es

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1 + i)\,a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n-1}|i} + 1$$

N. 3

Hallar el valor actual de una renta pospagable de diez pagos, anualidad de 10.000 ptas., y tanto de valoración del 5 %, sabiendo que comenzaremos a devengarla dentro de cinco años.

El esquema de la operación descrita es:



ya que el pago de la primera cuantía tendrá lugar al final del año sexto.

El problema consiste en calcular el valor actual de una renta constante, diferida, temporal y pospagable. De la relación

$$V_0 = c\ {}^{p/}a_{\overline{n}|i} = c\,(1+i)^{-p}\, a_{\overline{n}|i} = c\,(a_{\overline{n+p}|i} - a_{\overline{n}|i})$$

para $p = 5$, $n = 10$ e $i = 0{,}05$ se sigue:

$$V_0 = 10.000\ {}^{5/}a_{\overline{10}|0{,}05} = 10.000\,(a_{\overline{15}|0{,}05} - a_{\overline{5}|0{,}05}) =$$

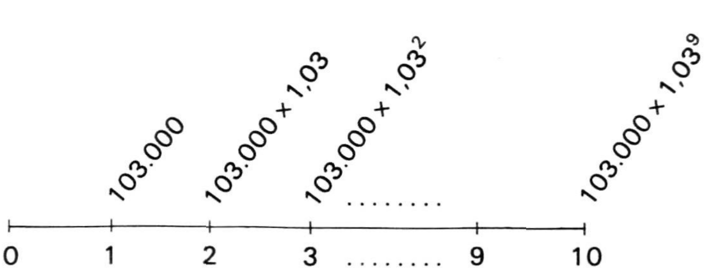
$$= 10.000\,(10{,}37965804 - 4{,}32947667) = 60.501{,}81 \text{ ptas.}$$

N. 4

¿Qué capital necesitaremos imponer en una entidad bancaria que abonan intereses del 4,5 % para que éste sea suficiente para cubrir los gastos de un negocio durante 10 años, sabiendo que el año anterior ascendieron a 100.000 ptas. y se prevé un aumento anual del 3 %? (Se supone que los gastos se abonan al final de cada año).

Se trata de calcular el valor actual de la renta de los gastos del negocio que es una de términos variables en progresión geométrica de razón $q = 1{,}03$ y primer término $100.000 + 0{,}03 \times 100.000 = 103.000$.

Su representación queda recogida en el esquema:



El valor actual, que es la cantidad a imponer en la entidad bancaria, asciende a:

$$A_{(103.000\ ;\ 1,03)\ \overline{10|}0,045} = 103.000\ \frac{1-(1+0,045)^{-10}\ (1+0,03)^{10}}{1+0,045-(1+0,03)} =$$

$$= 924.356,67$$

N. 5

Determinar el valor actual de una renta pospagable de 15 términos sabiendo que la cuantía del primer término es de 25.000 ptas. y los siguientes aumentan cada año en 1.000 ptas., y que se valora al tipo de interés anual del 5 %.

Se trata de calcular el valor actual de una renta variable en progresión aritmética valorada al 5 % con primer término 25.000 ptas., razón de la progresión 1.000 y número de términos 15. O sea:

$$A_{(25.000\ ;\ 1.000)\overline{15|}0,05} = \left(25.000 + \frac{1.000}{0,05} + 1.000 \times 15\right) a_{\overline{15|}0,05} -$$

$$- \frac{1.000 \times 15}{0,05} =$$

$$= 60.000 \times 10,37965804 - 300.000 = 322.779,48$$

N. 6

Calcular los valores finales de las rentas definidas en los anteriores ejercicios.

Supuesto N. 1.– El valor final de una renta pospagable constante es:

$$V_n = c\ s_{\overline{n|}i} = c\ (1+i)^n\ a_{\overline{n|}i}$$

luego

$$V_{10} = 10.000\ s_{10|0,045} = 10.000 \times 12,288208 = 122.882,08$$

El valor $s_{\overline{n|}i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i}$ para los distintos valores de n y de i viene calculado en las tablas financieras.

Supuesto N. 2.– Por tratarse de una renta prepagable constante resulta:

$$V_n = c\,\ddot{s}_{\overline{n}|i} = c\,(1+i)\,s_{\overline{n}|i} = c\,(1+i)^n\,\ddot{a}_{\overline{n}|i} = c\,\left(s_{\overline{n+1}|i} - 1\right)$$

o sea

$$V_{20} = 3.000\,\ddot{s}_{\overline{20}|0{,}05} = 3.000\,\left(s_{\overline{21}|0{,}05} - 1\right) = 104.157{,}76$$

Supuesto N. 3.– Es análogo al caso primero

$$V_{15} = 10.000\,s_{\overline{10}|0{,}05} = 125.778{,}92$$

Supuesto N. 4.– En la renta variable en progresión geométrica se tiene:

$$S_{(c\,;\,q)\overline{n}|i} = (1+i)^n\,A_{(c,\,q)\overline{n}|i} = c\,\frac{(1+i)^n - q^n}{1+i-q}$$

y en consecuencia:

$$S_{(103.000\,;\,1{,}03)\overline{10}|0{,}045} = 103.000\,\frac{(1+0{,}045)^{10} - 1{,}03^{10}}{1+0{,}045-1{,}03} = 1.435.497{,}26$$

Supuesto N. 5.– El valor de esta renta es:

$$S_{(c\,;\,d)\overline{n}|i} = (1+i)^n\,A_{(c,\,d)\overline{n}|i} = \left(c + \frac{d}{i}\right)s_{\overline{n}|i} - \frac{dn}{i}$$

luego

$$S_{(25.000\,;\,1.000)\overline{15}|0{,}05} = \left(25.000 + \frac{1.000}{0{,}05}\right)s_{\overline{15}|0{,}05} - \frac{1.000 \times 15}{0{,}05} =$$

$$= 671.035{,}38$$

N. 7

Obtener los valores actuales de las rentas de los ejercicios números 1 al 5 cuando $n \longrightarrow \infty$.

Se trata de calcular los valores de las denominadas rentas perpetuas que son:

$$V_0 = c\, a_{\overline{\infty}|i} = c\,\frac{1}{i} = 10.000\,\frac{1}{0{,}045} = 222.222{,}22$$

$$V_0 = c\, \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = c\left(1 + \frac{1}{i}\right) = 3.000\left(1 + \frac{1}{0{,}05}\right) = 63.000$$

$$V_0 = c\; {}^{p}/a_{\overline{\infty}|i} = c\,(1+i)^{-p}\, a_{\overline{\infty}|i} = 10.000\,(1+0{,}05)^{-5}\,\frac{1}{0{,}05} = 156.705{,}23$$

$$A_{(103.000\,;\,1{,}03)\,\overline{\infty}|0{,}045} = 103.000\,\frac{1}{1+0{,}045-1{,}03} = 6.866.666{,}67$$

$$A_{(25.000\,;\,1.000)\,\overline{\infty}|0{,}05} = \left(25.000 + \frac{1.000}{0{,}05}\right)\frac{1}{0{,}05} = 1.300.000$$

N. 8

Si se realizan en una entidad bancaria, que capitaliza al 6,5 % anual, imposiciones anuales pospagables de 50.000 ptas., durante seis años ¿qué saldo existirá cuatro años después de realizada la última imposición?

El esquema de la renta es:

y se tiene que determinar su valor al final del periodo décimo. Se trata, en consecuencia de calcular una renta constante pospagable de seis términos y anticipada en cuatro, cuya cuantía es:

$$V_{10} = 50.000.\; {}_{4}/s_{\overline{6}|0{,}065} = 50.000\,\left[s_{\overline{10}|0{,}065} - s_{\overline{4}|0{,}065}\right] =$$

$$= 50.000\,(13{,}49442254 - 4{,}40717463) = 454.362{,}40$$

N. 9

Calcular el valor actual de una renta de 2.500 ptas., trimestrales, pospagable de 25.000 ptas., si su duración es cinco años y el tanto de valoración anual el 6 %.

Se trata de una renta fraccionada trimestral por lo que

$$V_0 = m.\ a.\ a^{(m)}_{\overline{n}|i}$$

y en nuestro caso resulta:

$$V_0 = 4 \times 25.000\ a^{(4)}_{\overline{5}|0{,}06} = 100.000 \frac{0{,}06}{j_{(4)}} a_{\overline{5}|0{,}06} =$$

$$= 100.000 \times 1{,}022222688 \times 4{,}21236379 = 430.597{,}38$$

habiéndose obtenido por tablas financieras los valores:

$$\frac{0{,}06}{j_{(4)}} = 1{,}02222688;\ a_{\overline{5}|0{,}06} = 4{,}21236379$$

N. 10

Determinar el valor actual de una renta de 10.000 ptas., mensuales y 10 años de duración si el tanto anual es el 6 % en los supuestos:
a) Percepción al final de cada mes.
b) Percepción al principio de cada mes.

a) Se trata de obtener el valor actual de una renta constante pospagable y fraccionada mensual, que es:

$$V_a = 10.000 \times 12\ a^{(12)}_{\overline{10}|0{,}06} = 120.000 \frac{0{,}06}{j_{(12)}} a_{\overline{10}|0{,}06} =$$

$$= 120.000 \times 1{,}02721070 \times 7{,}3600875 = 907243{,}22$$

b) Por tratarse de una renta prepagable se tiene:

$$V_b = 10.000 \times 12 \times \ddot{a}^{(12)}_{\overline{10}|0{,}06} = 120.000\ (1 + 0{,}06)^{1/12}\ a^{(12)}_{\overline{10}|0{,}06} =$$

$$= V_a\ (1 + 0{,}06)^{1/12} = 907.243{,}22 \times 1{,}00486755 = 911.659{,}27 \text{ ptas.}$$

N. 11

Determinar el valor actual de los salarios que una empresa ha de abonar a 10 obreros durante 3 años si la cuantía diaria de cada uno es de 2.000 ptas., y se abonan de esta forma y la valoración se efectúa al tanto del 6 %.

Los vencimientos de los términos de esta renta diaria de 2.000 × 10 = = 20.000 ptas., son prácticamente los de una renta continua por lo que:

$$V_0 = 365 \times 20.000\ \bar{a}_{\overline{3}|0,06} = 7.300.000\ \frac{0,06}{\rho}\ a_{\overline{3}|0,06} =$$

$$= 20.092.692,20 \text{ ptas.}$$

ya que

$$\rho = \log_e (1 + 0,06) = 0,05826891; \qquad a_{\overline{3}|0,06} = 2,67301195$$

N. 12

Se quiere cancelar una deuda de 384.311,27 ptas., mediante el abono de una renta anual pospagable de 25.000 ptas., si el tanto de valoración es el 5 % anual ¿cuál será el número de pagos a realizar?

En la ecuación $V_0 = c\ a_{\overline{n}|i}$ se conocen V_0, c, e i y es desconocido n pues:

$$384.311,27 = 25.000\ a_{n|0,05}$$

luego

$$a_{\overline{n}|0,05} = \frac{384.311,27}{25.000} = 15,372451$$

Las tablas financieras, en la columna del 5 %, para la duración $n = 30$ contienen el valor de la renta anterior, por lo que el número de pagos anuales a efectuar es 30.

N. 13

Sabiendo que el valor actual de una renta pospagable de 10 términos de 28.000 ptas., cada uno es de 200.000 ptas., determinar el tipo de interés a que ha sido evaluada.

En la ecuación:

$$V_0 = c\, a_{\overline{n}|i}$$

sustituyendo

$$200.000 = 28.000\, a_{\overline{10}|i}$$

y despejando

$$a_{\overline{10}|i} = \frac{200.000}{28.000} = 7{,}14285714$$

Las tablas financieras dan los valores

$$\left.\begin{array}{l} a_{\overline{10}|0{,}065} = 7{,}18883022 \\ a_{\overline{10}|0{,}07} \ \ = 7{,}02358155 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0{,}065 < i < 0{,}07$$

y por interpolación lineal se obtiene:

$$i = 0{,}066375$$

N. 14

La compra de un equipo de fabricación de fibras sintéticas importa una cantidad de 500.000 ptas. La casa vendedora ofrece las tres modalidades de pago siguientes:

a) Al contado, con una bonificación del 2 % pronto pago.
b) 100.000 ptas. al contado y el resto en veinticuatro mensualidades de 18.000 ptas., cada una.
c) 200.00 ptas., al contado, 100.000 ptas., aplazadas por un año y el resto mediante veinticuatro entregas trimestrales de 12.000 ptas., cada una, realizándose la primera a los tres meses de abonadas las 100.000 ptas.

Determinar la oferta más ventajosa si el tipo de interés de valoración es:

1.º El 6 % anual efectivo.

2.º El 9 % anual efectivo.

3.º El 12 % anual efectivo.

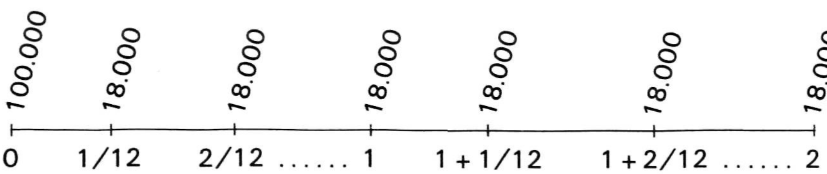
Se trata de determinar cuál de las opciones es más interesante y para ello es preciso proyectarlas en un mismo punto para elegir aquella proyección de menor cuantía. El punto de valoración o proyección que se elige, por ser el más usual, es el inicial o momento cero.

1.º Tipo de interés anual del 6 %.

a) Para la primera modalidad se tiene:

$$V_a = 500.000 - 0{,}02 \times 500.000 = 490.000$$

b) La segunda modalidad consiste en una primera entrega de 100.000 ptas., y un desembolso de una renta fraccionada mensual y pospagable, tal como indica el esquema



El valor actual de una renta constante y fraccionada, siendo m la frecuencia del fraccionamiento y a la cuantía de cada pago, es:

$$V_0 = a \times m \; \mathrm{a}^{(m)}_{\overline{n}|i} = a \times m \frac{i}{j_{(m)}} \mathrm{a}_{\overline{n}|i}$$

y en el supuesto resulta:

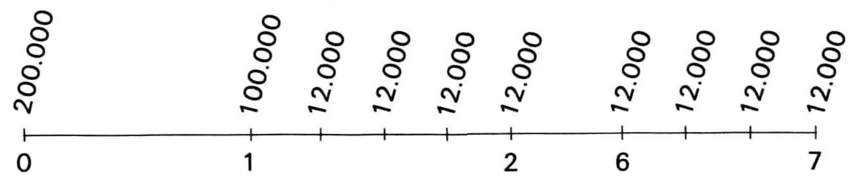
$$V_0 = 18.000 \times 12 \; \mathrm{a}^{(12)}_{\overline{2}|0{,}06} = 216.000 \frac{0{,}06}{j_{(12)}} \mathrm{a}_{\overline{2}|0{,}06} =$$

$$= 216.000 \times 1{,}02721081 \times 1{,}833392 = 406.788{,}50$$

La cuantía de la segunda modalidad asciende a:

$$V_b = 100.000 + 406.788{,}50 = 506.788{,}50$$

c) La modalidad tercera queda recogida en el siguiente esquema:



El valor en el momento cero, de los veinticuatro pagos trimestrales es el de una renta diferida en un periodo, fraccionada en cuatro y pospagable, es decir:

$$V_0 = 12.000 \times 4\ {}^{1}/a^{(4)}_{\overline{6}|0,06} = 48.000\ \frac{0,06}{j_{(4)}}\ (a_{\overline{7}|0,06} - a_{\overline{1}|0,06}) =$$

$$= 227.621,31$$

La cuantia que resulta para la modalidad *c* es:

$$V_c = 200.000 + 100.000\ (1 + 0,06)^{-1} + 227.621,31 = 521.960,93$$

En resumen, se tiene:

$$V_a = 490.000 < V_b = 506.788,50 < V_c = 521.960,93$$

siendo preferible la modalidad *a*.

2.º Tipo de interés anual del 9 %.

Siguiendo el camino del apartado 1.º se tiene:

$$V_a = 490.000$$

$$V_b = 100.000 + 18.000 \times 12\ a^{(12)}_{\overline{2}|0,09} = 495.399,13$$

$$V_c = 200.000 + 100.000\ (1 + 0,09)^{-1} + 12.000 \times 4\ {}^{1}/a^{(4)}_{\overline{6}|0,09} =$$

$$= 495.835,44$$

$$V_a = 490.000 < V_b = 495.399,13 < V_c = 495.835,44$$

3.º Tipo de interés anual del 12 %.

$$V_a = 490.000$$

$$V_b = 100.000 + 18.000 \times 12\ a^{(12)}_{\overline{2}|0,12} = 484.717,79$$

$$V_c = 200.000 + 100.000\ (1 + 0,12)^{-1} + 12.000 \times 4\ {}^{1}/a^{(4)}_{\overline{6}|0,12} =$$

$$= 473.231,15$$

N. 15

Una finca proporciona unos ingresos anuales de 160.000 ptas., y los gastos de conservación son el 15 % de los ingresos. Los beneficios líquidos se imponen en una entidad bancaria durante 10 años, y esta entidad abona unos intereses anuales del 6 %. Calcular la mensualidad de renta que es posible percibir, con el montante constituido, durante los siguientes quince años.

El montante que se conseguirá con las imposiciones al cabo de los diez años es:

$$M = 160.000 \times 0,85\ s_{\overline{10}|0,06} = 136.000 \times 13,18079494 = 1.792.588,11$$

El ahorrador no quiere retirar esta cantidad sino recibir su equivalente a través de una renta mensual de duración quince años y, por tanto, designando por X la cuantía mensual de renta se verificará:

$$1.792.588,11 = 12X\ a^{(12)}_{\overline{15}|0,06}$$

luego

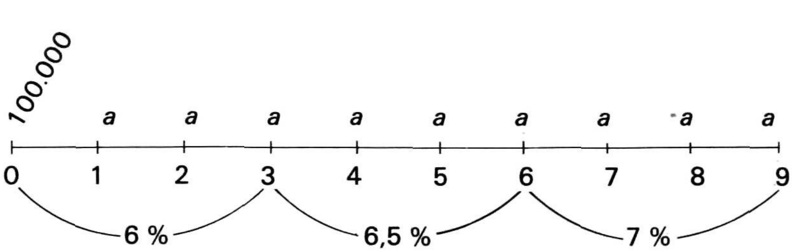
$$X = \frac{1.792.588,11}{12\ a^{(12)}_{\overline{15}|0,06}} = \frac{1.792.588,11}{12 \frac{0,06}{j_{(12)}} a_{\overline{15}|0,06}} =$$

$$= \frac{1.792.588,11}{12} \frac{j_{(12)}}{0,06}\ a^{-1}_{\overline{15}|0,06} = 14.973,53 \text{ ptas.}$$

N. 16

Un Sr. A recibe de otro Sr. B una cantidad de 100.000 ptas., a devolver juntamente con sus intereses, mediante nueve entregas iguales al final de cada año. Como nos encontramos en un periodo inflacionista el Sr. B exige un tanto de intereses que van en aumento y que es el 6 % para los tres primeros años, el 6,5 % para los tres siguientes y el 7 % para los tres últimos. Si la ley a utilizar es la de la capitalización compuesta, de parámetro el señalado para el correspondiente periodo ¿cuál será el valor de esa anualidad constante?

El esquema de la operación concertada es:



Para determinar la cuantía constante de los términos de la prestación *valoraremos en el origen la contraprestación que está formada por una* renta de tres términos a un tanto de valoración del 6 %, por una de tres términos a un tanto del 6,5 % y diferida en tres periodos a un tanto del 6 % y por una renta de tres términos a un tanto del 7 % diferida tres periodos a un tanto del 6,5 % y diferida en otros tres a un tanto del 6 %.

Resulta:

$$100.000 = a\, a_{\overline{3}|0,06} + a\, a_{\overline{3}|0,065}\,(1+0,06)^{-3} +$$

$$+\, a\, a_{\overline{3}|0,07}\,(1+0,065)^{-3}\,(1+0,06)^{-3}$$

de donde

$$a = \frac{100.000}{a_{\overline{3}|0,06} + (1+0,06)^{-3}\, a_{\overline{3}|0,065} + (1+0,06)^{-3}\,(1+0,065)^{-3}\, a_{\overline{3}|0,07}} =$$

$$= \frac{100.000}{6,72082758} = 14.879,12$$

N. 17

A un propietario de una finca urbana, de la que percibe unos alquileres de 15.000 ptas., al principio de cada mes, le proponen el cambio de ésta por una finca rústica, que produce unos rendimientos anuales netos de 100.000 ptas., y una renta trimestral durante 4 años. Si el tanto de mercado es del 7 % determinar la cuantía trimestral de la renta.

La condición de intercambio es:

Valor finca urbana = Valor finca rústica + Renta trimestral

Valor finca urbana:

$$V_{Fu} = 15.000 \times 12\ \ddot{a}^{(12)}_{\overline{\infty}|0,07} = 180.000\ (1 + 0,07)^{1/12}\ \frac{1}{j_{(12)}} =$$

$$= 180.000 \times 1.00565415\ \frac{1}{0,0678498} = 2.667.918,63 \text{ ptas.}$$

Valor finca rústica:

$$V_{FR} = 100.000\ a_{\overline{\infty}|0,07} = 1.428.571,42$$

Renta trimestral: Siendo X la cuantía de cada trimestre resulta

$$V_R = 4X\ a^{(4)}_{\overline{4}|0,07} = 13,8995095\ X$$

$$V_R = V_{Fu} - V_{FR} = 1.239.347,21 = 13,8995095\ X$$

de donde

$$X = 89.164,82$$

N. 18

Bajo un tanto de valoración del 6 % dígase que renta de las dos siguientes es mayor:

a) Renta mensual de 10.000 ptas.

b) Renta trimestral de 30.300 ptas.

La duración de ambas es de 10 años y las dos son pospagables.

El valor de la renta mensual es:

$$V_a = 10.000 \times 12\ a^{(12)}_{\overline{10}|0,06} = 120.000 \frac{0,06}{j_{(12)}}\ a_{\overline{10}|0,06} = 907.243,22$$

y el de la trimestral

$$V_b = 30.300 \times 4\ a^{(4)}_{\overline{10}|0,06} = 121.200 \frac{0,06}{j_{(4)}}\ a_{\overline{10}|0,06} = 911.869,87$$

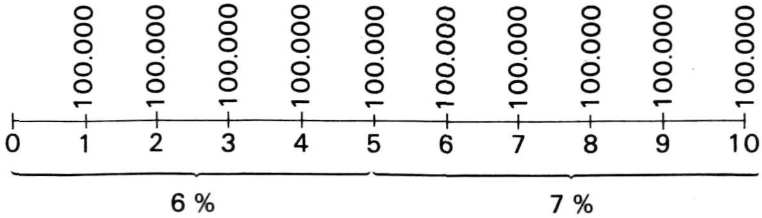
Por tanto:

$$V_a = 907.243,22 < V_b = 911.869,87$$

N. 19

Sabiendo que el mercado utiliza para las transacciones financieras un tanto del 6 % para operaciones que tengan una duración máxima de 5 años y el 7 % para los excesos sobre los cinco años determinar el valor actual de una renta de duración 10 años cuya cuantía anual es de 100.000 ptas. (Se supone que se devenga a final de cada periodo).

El esquema de la renta es:



El valor actual es:

$$V_0 = 100.000\ a_{\overline{5}|0,06} + 100.000\ a_{\overline{5}|0,07}\ (1 + 0,06)^{-5} = 727.626,98$$

N. 20

Poner en función de rentas inmediatas unitarias las expresiones siguientes:

1.° Rentas constantes

$$^{h}/\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i}\ ;\ ^{4}/\ddot{s}^{(6)}_{\overline{12}|i}\ ;\ ^{2}/\ddot{a}^{(12)}_{\overline{\infty}|i}\ ;\ ^{6}/a^{(6)}_{\overline{6}|0,06}$$

2.° Rentas variables en progresión geométrica

$$^{h}/A^{(m)}_{(c\,;\,q)\,\overline{n}|i}\ ;\ ^{2}/\ddot{S}_{(1.000\ ;\ 1,06)\,\overline{10}|0,10}$$

3.° Rentas variables en progresión aritmética

$$^{p}/\ddot{S}_{(c\,;\,d)\,\overline{n}|i}\ ;\ ^{1/4}/\ddot{A}^{(4)}_{(c\,;\,d)\,\overline{n}|i}$$

4.° Rentas continuas

$$^{6}/\bar{a}_{\overline{\infty}|i}\ ;\ ^{5}/\bar{s}_{\overline{5}|i}\ ;\ ^{1/2}/\bar{a}_{\overline{n}|i}$$

1.° Rentas constantes

$$^{h}/\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-h}\,\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-h}\,(1+i)^{1/m}\,\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i} =$$

$$= (1+i)^{-h}\,(1+i)^{1/m}\,\frac{i}{j_{(m)}}\,a_{\overline{n}|i} = (1+i)^{1/m}\,\frac{i}{j_{(m)}}\,(a_{\overline{n+h}|i} - a_{\overline{n}|i})$$

$$^{4}/\ddot{s}^{(6)}_{\overline{12}|i} = (1+i)^{4}\,\ddot{s}^{(6)}_{\overline{12}|i} = (1+i)^{4}\,(1+i)^{1/6}\,\bar{s}^{(6)}_{\overline{12}|i} =$$

$$= (1+i)^{4}\,(1+i)^{1/6}\,\frac{i}{j_{(6)}}\,s_{\overline{12}|i} = (1+i)^{1/6}\,\frac{i}{j_{(6)}}\,(s_{\overline{16}|i} - s_{\overline{4}|i})$$

$$^{2}/\ddot{a}^{(12)}_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-2}\,(1+i)^{1/12}\,\frac{i}{j_{(12)}}\,a_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-2}\,(1+i)^{1/12}\,\frac{1}{j_{(12)}}$$

$$^{6}/a^{(6)}_{\overline{6}|0,06} = (1+0,06)^{-6}\,\frac{0,06}{j_{(6)}}\,a_{\overline{6}|0,06} = \frac{0,06}{j_{(6)}}\,[a_{\overline{12}|0,06} - a_{\overline{6}|0,06}]$$

2.º Rentas variables en progresión geométrica.

$$^{h}/A^{(m)}_{(c\,;\,q)\,\overline{n}|i} = (1+i)^{-h}\,\frac{i}{j_{(m)}}\,A_{(c\,;\,q)\overline{n}|i} =$$

$$= (1+i)^{-h}\,\frac{i}{j_{(m)}}\,c\,\frac{1-(1+i)^{-n}\,q^{n}}{1+i-q}$$

$$^{2}/\ddot{S}_{(1.000\,;\,1{,}06)\overline{10}|0{,}10} = 1.000\,(1+0{,}10)^{3}\,\frac{(1+0{,}10)^{10}-1{,}06^{10}}{0{,}04}$$

3.º Rentas variables en progresión aritmética.

$$^{p}/\ddot{S}_{(c\,;\,d)\overline{n}|i} = (1+i)^{p+1}\,S_{(c\,;\,d)\overline{n}|i} =$$

$$= (1+i)^{p+1}\left[\left(c+\frac{d}{i}\right)s_{\overline{n}|i}-\frac{dn}{i}\right]$$

$$^{1/4}/\ddot{A}^{(4)}_{(c;\,d)\overline{n}|i} = (1+i)^{-1/4}\,(1+i)^{1/4}\,\frac{i}{j_{(4)}}\,A_{(c\,;\,d)\overline{n}|i} =$$

$$= \frac{i}{j_{(4)}}\left[\left(c+\frac{d}{i}+dn\right)a_{\overline{n}|i}-\frac{dn}{i}\right]$$

4.º Rentas continuas

$$^{6}/\bar{a}_{\overline{\infty}|i} = (1+i)^{-6}\,\frac{1}{\log_{e}(1+i)} = (1+i)^{-6}\,\frac{1}{\rho}$$

$$^{5}/\bar{S}_{\overline{5}|i} = (1+i)^{5}\,\frac{i}{\rho}\,S_{\overline{5}|i} = \frac{i}{\rho}\left(S_{\overline{10}|i}-S_{\overline{5}|i}\right)$$

$$^{1/2}/\bar{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)^{-1/2}\,\frac{i}{\rho}\,a_{\overline{n}|i}$$

N. 21

Determinar las expresiones del valor final y del valor actual de la renta, valorada en capitalización simple, con $p = t_n$, y definida por las siguientes características:

- ***Cuantía constante de los términos.***
- **Pospagable.**

– Número de términos n.
– Periodos de maduración iguales a $\frac{1}{m}$ de año.

Aplicar los resultados obtenidos para los valores $C = 25.000$, $n = 24$, $m = 12$ e $i = 0{,}08$.

La renta descrita en el ejercicio es:

	c	c	c	c	c	c
0	$1/m$	$2/m$	$3/m$	s/m	$n{-}1/m$	n/m

y en base a la ley $L(t; p) = 1 + i\,(p - t)$, con $p = t_n = \frac{n}{m}$, es su valor final

$$V_n = \sum_{s=1}^{n} c\,(1 + i\frac{n-s}{m}) = c\,n\,(1 + i\,\frac{n-1}{2\,m})$$

y su valor actual

$$V_0 = \sum_{s=1}^{n} c\,\frac{1 + i\,\dfrac{n-s}{m}}{1 + i\,\dfrac{n}{m}} = c\,\frac{n\left(1 + i\,\dfrac{n-1}{2m}\right)}{1 + i\,\dfrac{n}{m}} = \frac{V_n}{1 + i\,\dfrac{n}{m}}$$

Para los valores $c = 25.000$, $n = 24$, $m = 12$ e $i = 0{,}08$ se tiene:

$$V_n = V_{24} = 25.000 \times 24\left(1 + 0{,}08\,\frac{23}{24}\right) = 646.000$$

$$V_0 = 25.000\,\frac{24\left(1 + 0{,}08\,\dfrac{23}{24}\right)}{1 + 0{,}08\,\dfrac{24}{12}} = 556.896{,}55$$

N. 22

Obtener las expresiones del valor actual y del valor final de la renta del ejercicio anterior si la valoración se efectúa con la ley $A(t\,; p) = 1 - d\,(t - p)$, con $p = 0$. Aplicar los resultados a los valores $C = 40.000$, $n = 18$, $m = 12$ y $d = 0{,}10$.

El valor actual es:

$$V_0 = \sum_{s=1}^{n} c\left(1 - i\frac{s}{m}\right) = cn\ \left(1 - i\,\frac{1+n}{2m}\right)$$

y el valor final

$$V_n = \frac{V_0}{1 - i\dfrac{n}{m}} = c\,\frac{n\left(1 - i\dfrac{1+n}{2m}\right)}{1 - i\dfrac{n}{m}}$$

La sustitución de los valores del enunciado genera los siguientes resultados:

$$V_0 = 40.000 \times 18\left(1 - 0{,}10\,\frac{19}{24}\right) = 663.000$$

$$V_n = V_{18} = 40.000\,\frac{18\left(1 - 0{,}10\,\dfrac{19}{24}\right)}{1 - 0{,}10\,\dfrac{18}{12}} = 780.000$$

N. 23

Calcular los valores actual y final de una renta contínua con las siguientes características:

- **Definida en el intervalo $[h,\ n+h]$.**
- **Función de densidad: $C(t) = a > 0$.**
- **Ley financiera de valoración:**

  a) **$L(t;\,p) = 1 + i\,(p - t)$, con $p = n + h + s$.**

  b) **$A(t;\,p) = 1 - i\,(t - p)$, con $p = 0$.**

Obtener, además, la función de distribución y los valores para el caso particular notable $s = 0$, $h = 0$.

El valor de una renta contınua en p es:

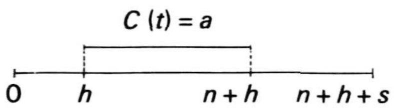
$$\bar{V}_p = \int_{to}^{tn} C\,(t)\,F\,(t;\,p)\,dt$$

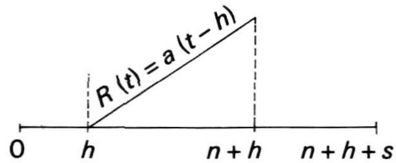
y siempre se verifica que:

$$\bar{V}_p = \bar{V}_0\,F\,(t_0\,;\,p) = \bar{V}_n\,F\,(t_n\,;\,p)$$

La función de distribución y la representación de ésta así como la de densidad son:

$$R(t) = \int_h^t C(x)\,dx = \int_h^t a\,dx = a(t-h)$$





a) Para la ley financiera de valoración $L(t; p) = 1 + i(p-t)$, con $p = n + h + s$, los valores en p, actual o en $t_0 = h$ y final o en $t_n = n + h$ son:

$$\bar{V}_p = \int_h^{n+h} a[1 + i(p-t)]\,dt = \int_h^{n+h} a[1 + i(n+h+s-t)]\,dt =$$

$$= \left[[a + ai(n+h+s)]\,t - \frac{ai}{2}t^2 \right]_h^{n+h} = an\left[1 + i\left(\frac{n}{2} + s\right)\right]$$

$$\bar{V}_h = \frac{\bar{V}_p}{1 + i(p-h)} = a\,\frac{n\left[1 + i\left(\frac{n}{2} + s\right)\right]}{1 + i(n+s)}$$

$$\bar{V}_{n+h} = \frac{\bar{V}_p}{1 + i[p-(n+h)]} = a\,\frac{n\left[1 + i\left(\frac{n}{2} + s\right)\right]}{1 + is}$$

En el caso particular de $s = 0$ y $h = 0$ se tiene:

$$\bar{V}_p = \bar{V}_{n+h} = \bar{V}_n = a\,n\left(1 + i\frac{n}{2}\right)$$

$$\bar{V}_0 = \bar{V}_h = a\,\frac{n\left(1 + i\frac{n}{2}\right)}{1 + in}$$

b) Para la ley financiera de valoración $A(t; p) = 1 - i(t-p)$, con $p = 0$ los resultados son:

$$\bar{V}_p = \bar{V}_0 = \int_h^{n+h} a(1 - it)\,dt = an\left[1 - i\left(\frac{n}{2} - h\right)\right]$$

$$\bar{V}_h = \frac{\bar{V}_0}{1 - i\,h} = a\,\frac{n\left[1 - i\left(\frac{n}{2} - h\right)\right]}{1 - i\,h}$$

$$\bar{V}_{n+h} = \frac{\bar{V}_0}{1 - i\,(n+h)} = a\,\frac{n\left[1 - i\left(\frac{n}{2} - h\right)\right]}{1 - i\,(n+h)}$$

y en particular para $s = 0$ y $h = 0$

$$\bar{V}_p = \bar{V}_h = \bar{V}_0 = a\,n\left(1 - i\frac{n}{2}\right)$$

$$\bar{V}_{n+h} = \bar{V}_h = a\,\frac{n\left(1 - \frac{i}{2}n\right)}{1 - i\,n}$$

N. 24

Obtener las expresiones de los valores actual y final de una renta continua definida en el intervalo [0, u], función de densidad $C(t) = a + bt$, con $a > 0$ y $b > 0$, y ley financiera de valoración:

1.° $L(t; p) = 1 + i\,(p - t)$, con $p = n$

2.° $A(t; p) = 1 - i\,(t - p)$, con $p = 0$.

Con la ley de capitalización los valores pedidos son:

$$\bar{V}_n = \int_0^n (a + bt)\,[1 + i(n - t)]\,dt = n\left[a + (ai + b)\frac{n}{2} + bi\frac{n^2}{6}\right]$$

$$\bar{V}_0 = \frac{\bar{V}_n}{1 + i\,n} = \frac{n\left[a + (a\,i + b)\frac{n}{2} + bi\frac{n^2}{6}\right]}{1 + i\,n}$$

y para la ley de descuento se tiene:

$$\bar{V}_0 = \int_0^n (a + bt)\,(1 - it)\,dt = n\left[a + (ai - b)\frac{n}{2} - bi\frac{n^2}{6}\right]$$

$$\bar{V}_n = \frac{\bar{V}_0}{1 - i\,n} = \frac{n\left[a + (ai - b)\frac{n}{2} - bi\frac{n^2}{6}\right]}{1 - i\,n}$$

N. 25

Calcular los valores actual y final de una renta continua de *n* años de duración sabiendo que la ley financiera de valoración es la capitalización compuesta y la función de densidad de la renta es $C\,(t) = a + bt + ct^2$.

El valor de la renta es:

$$\bar{V}_0 = \int_0^n (a + bt + ct^2)\,(1+i)^{-t}\,dt = a\int_0^n (1+i)^{-t}\,dt + b\int_0^n t\,(1+i)^{-t}\,dt +$$

$$+ c\int_0^n t^2\,(1+i)^{-t}\,dt = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{\varrho} + b\left[-\frac{n\,(1+i)^{-n}}{\varrho} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varrho}\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{\varrho}\right] + c\left[-\frac{n\,(1+i)^{-n}}{\varrho}\left(n+\frac{2}{\varrho}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\varrho^2}\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{\varrho}\right] = a\,\bar{a}_{\overline{n}|i} + b\left[-\frac{n\,(1+i)^{-n}}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\,\bar{a}_{\overline{n}|i}\right] +$$

$$+ c\left[-\frac{n\,(1+i)^{-n}}{\varrho}\left(n+\frac{2}{\varrho}\right) + \frac{2}{\varrho^2}\,\bar{a}_{\overline{n}|i}\right] =$$

$$= \left(a + \frac{b}{\varrho} + \frac{2c}{\varrho^2}\right)\bar{a}_{\overline{n}|i} - \left[b + c\left(n+\frac{2}{\varrho}\right)\right]\frac{n\,(1+i)^{-n}}{\varrho}$$

$$= \left[a + bn + cn^2 + \frac{b + 2\,c\,(1+n)}{\varrho}\right]\bar{a}_{\overline{n}|i} - \left[b + c\left(n+\frac{2}{\varrho}\right)\right]\frac{n}{\varrho}$$

El valor final que se obtiene es:

$$\bar{V}_n = \bar{V}_0\,(1+i)^n = \left(a + \frac{b}{\varrho} + \frac{2\,c}{\varrho}\right)\bar{s}_{\overline{n}|i} - \left[b + c\left(n+\frac{2}{\varrho}\right)\right]\frac{n}{\varrho}$$

N. 26

Con las fórmulas obtenidas en los ejercicios N. 23, N. 24 y N. 25 calcular los valores actuales de las rentas contínuas, definidas en el intervalo [0,10] y caracterizadas por:

1.° Función de densidad $C(t) = 50.000$ y ley de valoración $A(t; p) = 1 - 0{,}04\,(t; p)$, con $p = 0$.

2.° Función de densidad $C(t) = 20.000 + 500t$ y ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}07\,(p - t)$ con $p = 0$.

3.° Función de densidad $C(t) = 25.000 + 200t + 10t^2$ y ley de valoración $L(t; p) = (1 + 0{,}10)^{p-t}$.

1.° Por el N. 23 apartado *b* se tiene:

$$\bar{V}_0 = an\left(1 - i\frac{n}{2}\right) = 50.000 \times 10\left(1 - 0{,}04\,\frac{10}{2}\right) = 400.000$$

2.° Según N. 24, apartado 1.° podemos escribir:

$$\bar{V}_0 = \frac{n\left[a + (ai + b)\,\frac{n}{2} + bi\,\frac{n^2}{6}\right]}{1 + in} =$$

$$= \frac{10\left[20.000 + (20.000 \times 0{,}07 + 500)\,\frac{10}{2} + 500 \times 0{,}07\,\frac{100}{6}\right]}{1 + 0{,}07 \times 10} =$$

$$= 176.690{,}78$$

3.° Por aplicación de la fórmula del N. 25 resulta:

$$\bar{V}_0 = \left[a + bn + cn^2 + \frac{b + 2c\,(1 + n)}{\rho}\right]\bar{a}_{\overline{n}|i} - \left[b + c\left(n + \frac{2}{\rho}\right)\right]\frac{n}{\rho} =$$

$$= \quad 25.000 + 200 \times 10 + 10 \times 100 + \frac{200 + 20 \times 11}{\log_e(1 + 0{,}10)} \quad \bar{a}_{\overline{10}|0{,}10} -$$

$$- \left[500 + 10\left(10 + \frac{2}{\log_e(1 + 0{,}10)}\right)\right]\frac{10}{\log_e(1 + 0{,}10)} = 123.954{,}03$$

N. 27

Realizando imposiciones anuales pospagables de cuantía *C* en una entidad bancaria, al cabo de 10 años se adquirió, con el capital constituido, una finca rústica que produce las mismas *C* ptas. al año, si el tanto de capitalización de las imposiciones y el de rentabilidad de la finca es el mismo, razónese cómo se determinaría el tanto.

Por ser suficiente el montante constituido para cubrir el valor de la finca se tiene:

$$C\, s_{\overline{10|}\,i} = C\, a_{\overline{\infty|}\,i} \Rightarrow \frac{(1+i)^{10}-1}{i} = \frac{1}{i}$$

y, en consecuencia, resulta:

$$i = 2^{1/10} - 1 = 0{,}071773$$

N. 28

Qué tipo de rendimiento unitario nos da una finca rústica valorada en 5.000.000 de ptas., de la que se perciben unos alquileres de 30.000 ptas:

a) Al final de cada mes.

b) Al principio de cada mes.

Qué se debería cobrar para obtener el mismo rendimiento unitario si los impuestos sobre los rendimientos fueran del 20 % y se abonaran al final de cada año?

En el supuesto *a* el tipo de rendimiento unitario o tanto efectivo anual será el que verifique la ecuación

$$5.000.000 = 12 \times 30.000\, a^{(12)}_{\overline{\infty|}\,i} = 360.000 \frac{1}{j_{(12)}}$$

despejando se sigue

$$j_{(12)} = 0{,}072$$

y el tanto efectivo anual es

$$i_a = \left(1 + \frac{0{,}072}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}074424$$

En el supuesto *b* el tipo de rendimiento unitario se calcula en la ecuación:

$$5.000.000 = 12 \times 30.000\ \ddot{a}^{(12)}_{\overline{\infty}|i} = 360.000 \left(1 + \frac{j_{(12)}}{12}\right) \frac{1}{j_{(12)}}$$

resultando:

$$j_{(12)} = 0{,}072435\ ;\ i_b = \left(1 + \frac{0{,}072435}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}074888$$

Si los impuestos sobre los rendimientos son el 20 %, los alquileres mensuales a percibir deben ser:

– En el supuesto *a*:

$$5.000.000 = 12\,a\ a^{(12)}_{\overline{\infty}|0{,}074424} - 0{,}20 \times 12\,a\ a_{\overline{\infty}|0{,}074424} =$$

$$= 12\,\frac{0{,}80}{0{,}072}\,a = 133{,}33\,a$$

luego

$$a = \frac{5.000.000}{133{,}33} = 37.500$$

– En el supuesto *b*

$$5.000.000 = 12\,b\ \ddot{a}^{(12)}_{\overline{\infty}|0{,}074888} - 0{,}20 \times 12\,b\ a_{\overline{\infty}|0{,}074888} =$$

$$= 12\,\frac{0{,}80}{0{,}072435}\,b = 132{,}53b$$

es decir

$$b = \frac{5.000.000}{132{,}53} = 37.726{,}56$$

N. 29

Determinar el valor de una finca urbana sabiendo que se perciben en concepto de alquileres 26.000 ptas. al mes, que se abonan 5.000 ptas. al final de cada mes en concepto de gastos de administración y que las contribuciones e impuestos ascienden a 2.000 ptas. trimestrales, si para la valoración se utiliza el rédito semestral constante del 3,5 %.

El valor de la finca urbana es el que resulta de actualizar los ingresos netos que proporciona, es decir, es:

$$V_F = 26.000 \times 6\ \ddot{a}^{(6)}_{\infty|0,035} - [5.000 \times 6\ a^{(6)}_{\infty|0,035} +$$

$$+ 2.000 \times 2\ a^{(2)}_{\infty|0,035}] = 3.562.871,40 \text{ ptas.}$$

N. 30

Un empleado que percibe un sueldo de 20.000 ptas. mensuales más una paga extraordinaria del mismo importe cada seis meses, adquiere una vivienda en las siguientes condiciones de pago:

a) En el momento del contrato abona una cantidad igual a sus ingresos de un año.

b) El resto de la vivienda la amortizará abonando el 25 % de su sueldo mensual y el 50 % de las pagas extraordinarias durante 6 años.

Determinar el precio de contado del piso sabiendo que las cantidades aplazadas llevan unos intereses anuales a rédito del 7,5 %.

El precio de contado del piso está formado por:

a) La cuantía que se entrega al formalizar el contrato que es

$$20.000 \times 14 = 280.000$$

b) Por el valor de una renta mensual de 5.000 ptas. de duración 6 años.

c) Por el valor de una renta semestral de 10.000 ptas. de duración 6 años.

En consecuencia tenemos:

$$P = 280.000 + 12 \times 5.000\, a^{(12)}_{\overline{6}|0,075} + 2 \times 10.000\, a^{(2)}_{\overline{6}|0,075} =$$

$$= 280.000 + 60.000 \frac{0,075}{j_{(12)}} a_{\overline{6}|0,075} + 20.000 \frac{0,075}{j_{(2)}} a_{\overline{6}|0,075} =$$

$$= 280.000 + 291.186,35 + 95.605,30 = 666.791,65$$

N. 31

Cierta constructora vende los pisos en las siguientes condiciones:

a) 50.000 ptas. al realizar el contrato.

b) 12 mensualidades de 5.000 ptas. cada una, abonándose el pago de la primera al mes de firmado el contrato.

c) 125.000 ptas. a la entrega de llaves, que está prevista para dentro de un año.

d) 96 pagos mensuales de 4.800 ptas. a continuación de la finalización de los primeros doce pagos de 5.000 ptas.

Si el tipo de interés que aplican es del 6,5 %, se pide:

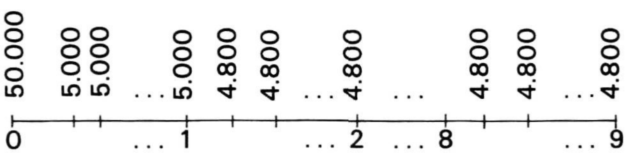
I) Valor del inmueble en el momento de la entrega de llaves.

II) Cantidad que tendría que abonarse si se diese el total en el momento de la firma del contrato.

III) También puede elegirse la alternativa de no pagar ninguna cantidad en el momento de la entrega de llaves, con la condición de compensarlo en los noventa y seis pagos mensuales y aplicándose a la totalidad de la operación un tipo de interés del 7,5 % ¿cuál sería la cuantía de los 96 pagos mensuales, en estas condiciones?

El esquema de la operación

125.000



I) Es la suma financiera de todos los pagos al final del primer año, o sea:

$$V_1 = 50.000\ (1 + 0{,}065) + 5.000 \times 12\ \frac{0{,}065}{j_{(12)}} + 4.800 \times 12\ a^{(12)}_{\overline{8}|0{,}065} +$$

$$+ 125.000 = 53.250 + 61.767{,}11 + 361.041{,}17 + 125.000 =$$

$$= 601.058{,}28$$

II) La cantidad que tendría que abonarse al realizar el contrato, como único pago, se obtiene descontando un periodo la cuantía calculada en el apartado anterior, es decir:

$$V_0 = V_1\ (1 + 0{,}065)^{-1} = 601.058{,}28 \times 0{,}938967 = 564.373{,}98$$

III) Para encontrar la solución del último apartado es necesario resolver la siguiente ecuación:

$$564.373{,}98 = 50.000 + 5.000 \times 12\ a^{(12)}_{\overline{1}|0{,}075} + 12 \cdot X\ {}^{1/}a^{(12)}_{\overline{8}|0{,}075}$$

que resulta de igualar el valor del piso en el momento de la realización del contrato con la cadena de pagos a realizar; pero valorándolos al nuevo tipo de interés unitario del 0,075. La cuantía a abonar en cada uno de los 96 pagos últimos es la incógnita X.

Efectuando operaciones:

$$564.376{,}4 = 50.000 + 60.000\ \frac{0{,}075}{j_{(12)}}\ a_{\overline{1}|0{,}075} +$$

$$+ 12\ X\ \frac{0{,}075}{j_{(12)}}\ [a_{\overline{9}|0{,}075} - a_{\overline{1}|0{,}075}] =$$

$$= 50.000 + 57.707{,}69 + 67{,}602292\ X$$

y despejando

$$X = \frac{456.666,29}{67,602292} = 6.755,19$$

N. 32

Hace tres años fue comprado un coche por 475.000 ptas. el cual hoy es vendido en 200.000 ptas. El gasto de mantenimiento ha ascendido a 8.000 ptas. mensuales. Bajo un tanto de valoración del 10 % anual determinar el coste del disfrute en estos momentos (pueden suponerse los gastos de mantenimiento a final de mes).

El esquema de las cantidades pagadas es:

475.000	8.000	8.000	....	8.000	8.000	8.000	....	8.000	8.000	8.000	....	8.000
0			....	1			....	2			....	3

El valor de todas estas cantidades pagadas en el momento de la venta es:

$$475.000\,(1 + 0,10)^3 + 8.000 \times 12\; S^{(12)}_{\overline{3}|0,10} = 964.300.09$$

y el coste del disfrute

$$C_d = 964.300,09 - 200.000 = 764.300,09$$

ya que al valor de las cantidades desembolsadas hay que restar el valor residual obtenido por la venta del vehículo.

El coste del disfrute equivale al valor X que realmente debe asignarse como gasto medio mensual y que se obtiene de la ecuación:

$$12\, X\, S^{(12)}_{\overline{3}|0,10} = 764.300,09$$

Su solución es:

$$X = 18.412,70$$

N. 33

Una finca en venta es solicitada por tres compradores que ofrecen:

Comprador A: 500.000 ptas. al contado, 1.000.000 de ptas. a los dos años y el resto en 48 pagos mensuales pospagables, a partir de los dos años, de 10.000 ptas. cada uno.

Comprador B: 300.000 ptas. al contado y 20 pagos trimestrales pospagables de 85.000 ptas. cada uno.

Comprador C: 60 pagos mensuales de 35.000 ptas. cada uno abonando el primero a la firma del contrato.

Si el tipo de interés del mercado es el 7 % anual. ¿Cuál de las tres ofertas es la más conveniente?

La oferta más conveniente es la de valor actualizado más alto. Estos son:

$$V_A = 500.000 + 1.000.000\,(1+0{,}07)^{-2} + 10.000 \times 12 \times {}^{2}/a^{(12)}_{\overline{4}|0{,}07} =$$

$$= 1.739.714{,}33$$

$$V_B = 300.000 + 85.000 \times 4\; a^{(4)}_{\overline{5}|0{,}07} = 1.730.146{,}48$$

$$V_C = 35.000 \times 12\; \ddot{a}^{(12)}_{\overline{5}|0{,}07} = 1.786.704$$

y debe aceptarse la oferta A.

N. 34

Determinar el valor actual de una renta continua de n años de duración sabiendo que el tanto instantáneo de la ley de capitalización es $\rho\,(t;\,p) = \dfrac{1}{t+1}$ y la función de densidad de la renta es $C(t) = 2\,(t^3 + t^2)$.

El valor actual de la renta es:

$$\bar{V}_0 = \int_0^n C\,(t)\; e^{-\int_0^t \rho\,(x,\,p)\,dx}\, dt = \int_0^n 2(t^3+t^2)\; e^{-\int_0^t \frac{1}{x+1}\,dx}\, dt =$$

$$= \int_0^n 2\,(t^3+t^2)\,\frac{1}{t+1}\, dt = \frac{2}{3}n^2$$

N. 35

Un señor X., recibe en concepto de herencia una finca rústica cuyos rendimientos anuales netos ascienden a 200.000 ptas., dicho señor realiza una operación con una entidad financiera a la que entrega la finca a cambio de una cantidad dentro de 20 años, a determinar, y una renta trimestral pospagable de acuerdo con el siguiente esquema:

La cuantía de cada trimestre del primer año es de 20.000 ptas. las cuantías del segundo año un 10 % superiores a las del primero, las del tercer año un 10 % superiores a las del segundo y así sucesivamente.

Si la duración de la renta es 20 años y el tanto de valoración de la operación el 5 % anual efectivo se pide:

1.° Cantidad que tendrá que recibir el señor X al final de la percepción de la renta.

2.° Si al final del 5.° año deciden que la cuantía del apartado anterior se perciba en cinco pagos trianuales constantes venciendo el primero al final del octavo año ¿cuál será la cuantía de cada uno de estos pagos?

La equivalencia inicial entre la prestación y contraprestación es:

$$200.000\, a_{\overline{\infty|}0,05} = A^{(4)}_{(20.000 \times 4\,;\, 1,10)\, \overline{20|}0,05} + R\,(1 + 0,05)^{-20}$$

siendo R la cantidad a recibir complementariamente, despejando

$$R = \frac{200.000}{0,05}\,(1 + 0,05)^{20} - S^{(4)}_{(80.000\,;\, 1,10)\, \overline{20|}0,05} = 3.973.465,20$$

2.° La cuantía del término de la renta trianual se obtendrá en la ecuación

$$3.973.465,20\,(1 + 0,05)^{-15} = a\Big[(1 + 0,05)^{-3} + (1 + 0,05)^{-6} + \ldots +$$

$$+ (1 + 0,05)^{-15}\Big] = a\,(1 + 0,05)^{-3}\,\frac{1 - (1 + 0,05)^{-15}}{1 - (1 + 0,05)^{-1}}$$

$$a = 3.973.465,20\,\frac{(1 + 0,05)^{3} - 1}{(1 + 0,05)^{15} - 1} = 3.973.465,20\,\frac{S_{\overline{3|}0,05}}{S_{\overline{15|}0,05}} =$$

$$= 580.499,66$$

N. 36

Para la construcción de un edificio se van a tener que realizar unos desembolsos mensuales de 200.000 ptas., durante los 18 meses que están previstas la duración de las obras. El coste del solar, sobre el cual se proyecta la construcción, es de 1.000.000 ptas.

La remuneración del capital es del 7 % anual.

Se pide:

1.º Coste del edificio a la terminación de las obras.

2.º En el supuesto de que el edificio estuviera formado por 10 viviendas y el precio de venta al contado fuese un 20 % superior al coste dígase la mensualidad de renta que tendría que abonar un comprador durante 6 años que diera 100.000 ptas., al realizar el contrato (se supone que éste se realiza a la terminación de la construcción).

1.º) El coste del edificio a la terminación de la construcción estará formado por el coste del solar con los intereses del año y medio que hay que computarle y por los desembolsos realizados durante la construcción valorados a la terminación de las obras, es decir:

$$C_E = C_s + C_c$$

– Coste del solar $= C_s$

$$C_s = 1.000.000\ (1 + 0{,}07)\ (1 + 0{,}07)^{6/12} = 1.106.816{,}60$$

– Coste construcción $= C_c$

Lo dividiremos en dos partes:

a) Primer año, valorado a terminación obras

$$200.000 \times 12 \times \frac{0{,}07}{j_{(12)}}\ (1 + 0{,}07)^{6/12} = 2.561.276{,}35$$

b) Seis últimos meses.

Su esquema es.

	200.000	200.000	200.000	200.000	200.000	200.000
12	13	14	15	16	17	18

y su valoración resulta al final

$$200.000 \left[(1+0{,}07)^{5/12} + (1+0{,}07)^{4/12} + \ldots + (1+0{,}07)^{1/12} + 1 \right] =$$

$$= 200 \frac{(1+0{,}07)^{6/12} - 1}{(1+0{,}07)^{1/12} - 1} =$$

$$= 200.000 \frac{\frac{j'_{(2)}}{2}}{\frac{j_{(12)}}{12}} = 200.000 \times 6 \frac{j_{(2)}}{j_{(12)}} = 1.217.089{,}75$$

ya que

$$(1+0{,}07) = \left(1 + \frac{j_{(12)}}{12}\right)^{12} = \left(1 + \frac{j_{(2)}}{2}\right)^{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{j_{(2)}}{2} = (1+0{,}07)^{1/2} - 1 \\ \dfrac{j_{(12)}}{12} = (1+0{,}07)^{1/12} - 1 \end{cases}$$

Por tanto, el coste de la construcción asciende a

$$C_c = 2.561.276{,}35 + 1.217.089{,}75 = 3.778.366{,}10$$

y el del edificio resulta:

$$C_E = 1.106.816{,}60 + 3.778.366{,}10 = 4.885.182{,}70$$

2) Precio coste por vivienda $= \dfrac{4.885.182{,}70}{10} = 488.518{,}27$

Precio venta vivienda al contado = 488.518,27 × 1,20 = 586.221,92.

La venta de la forma propuesta tendrá que verificar que el valor en el momento del contrato de las cien mil pesetas más la renta de seis años y mensual sea igual al precio de venta al contado, es decir:

$$586.221{,}92 = 100.000 + 12\, X a^{(12)}_{\overline{6}|0{,}07}$$

$$X = \frac{486.221{,}92}{12} \frac{j_{(12)}}{0{,}07} a^{-1}_{\overline{6}|0{,}07} = 8.239{,}50 \text{ ptas.}$$

N. 37

Para obtener el título de licenciado en CC.PP.EE. es necesario superar los cinco cursos de que consta la licenciatura. El coste para el estado por alumno y curso asciende a 6.000 ptas. mensuales. Los gastos de matriculación ascienden a 10.000 ptas. cada curso y los de adquisición de libros a un promedio de 25.000 ptas. por curso. Si además los gastos de mantenimiento ascienden a 20.000 ptas. mensuales, excepto los meses de julio y agosto, determinar el coste del título en el supuesto que se obtenga en la convocatoria de septiembre bajo un tanto de valoración del 1 % mensual.

Coste del título (C_T) = Coste estatal (C_E) + Coste familiar (C_F)

– Coste estatal = C_E:

Se trata de obtener el valor final de una renta pospagable de sesenta términos, es decir,

$$C_E = 6.000\ \mathbf{S}_{\overline{60}|0,01} = 490.018$$

Llegaríamos al mismo resultado considerando una renta fraccionada mensual siendo el tanto efectivo anual

$$i = (1 + 0,01)^{12} - 1 = 0,126825$$

es decir,

$$C_E = 6.000 \times 12\ \mathbf{S}^{(12)}_{\overline{5}|0,126825} = 490.018$$

– Coste familiar = C_F:

Estará formado por el coste de las matrículas, libros y manutención.

Supondremos que las matrículas y los libros se devengan a principio de cada curso por lo que su monto final es:

$$C'_F = (10.000 + 25.000)\ \ddot{\mathbf{S}}_{\overline{5}|0,126825} = 253.968,79$$

Para obtener el coste de manutención supondremos que la familia desembolsa las 20.000 ptas., al principio de cada mes, por lo que el esquema de un curso cualquiera es:

20.000	20.000	20.000	20.000	20.000	20.000	20.000	20.000	20.000			20.000	
S	O	N	D	E	F	M	A	MA	J	JU	AG	S
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

El valor de todos los pagos a 30 de septiembre de un curso genérico es:

$$\Omega = 20.000\ {}^{4/}S_{\overline{9|}0,01} + 20.000\,(1 + 0,01) = 215.178,60$$

El valor de todos los cursos a final de carrera es:

$$C''_F = \Omega S_{\overline{5|}i} = 215.178,60\ S_{\overline{5|}0,126825} = 1.385.654,30$$

El coste familiar es:

$$C_F = C'_F + C''_F = 253.968,79 + 1.385.654,30 = 1.639.623,09$$

Coste del título $= C_T = C_E + C_F = 490.018 + 1.639.623,09 = 2.129.641,09$

N. 38

Una inversión cuyas características financieras son:

COSTE INICIAL	INGRESOS	GASTOS	DURACION	VALOR RESIDUAL
1.500.000	**100.000 bimestrales**	**5.000 semanales**	**5 años**	**500.000**

Dígase si es aconsejable realizarla si el tipo de interés del mercado es el 4 % semestral.

NOTA: Considérese el semestre formado por 26 semanas.

Para que la inversión sea aconsejable debe verificar que el valor actualizado de los ingresos al tipo de interés de mercado supere el coste de la inversión más el valor actualizado de los gastos a ese mismo tipo de interés.

Valor de los ingresos:

$$I = 100.000 \times 3\, a^{(3)}_{\overline{10}|0,04} + 500.000\,(1 + 0,04)^{-10} =$$

$$= 300.000 \,\frac{0,04}{j_{(3)}}\, a_{\overline{10}|0,04} + 500.000\,(1 + 0,04)^{-10} = 2.803.212,41$$

Valor de los gastos:

$$G = 5.000 \times 26 \times \bar{a}_{\overline{10}|0,04} + 1.500.000 =$$

$$= 130.000 \,\frac{0,04}{\rho}\, a_{\overline{10}|0,04} + 1.500.000 = 2.575.366,96$$

Vemos que la inversión interesa pues

$$I = 2.803.212,41 > G = 2.575.366,96$$

N. 39

Un inversor tiene la oportunidad de emplear su dinero en dos tipos de inversión cuyas características financieras son recogidas en el siguiente cuadro:

INVERSION	COSTES DE INVERSION	VALOR NETO DE PRODUCCION	COBROS DEL VALOR NETO DE LA PRODUCCION	DURACION	VALOR RESIDUAL
I	8.700.000	100.000 ptas. mensuales (supóngase que se contabiliza la producción a fin de mes)	60 días después de contabilizada la producción	10 años	500.000
II	4.650.000	2.000 ptas. diarias	al contado	8 años	300.000

Determinar cuál de las dos inversiones es más conveniente si en principio las dos son igualmente posibles de llevar a su realización.

Para ver cuál de las dos soluciones es la adecuada se determinará el tanto de rendimiento unitario anual o eficacia marginal del capital de cada una de las dos inversiones. Dicho tanto de rendimiento es aquel que verifica la igualdad entre ingresos y gastos.

Inversión I: El tanto de rendimiento es el valor i_I que verifica la ecuación:

$$8.700.000 = 100.000 \times 12 \times (1 + i_I)^{-2/12} \, a^{(12)}_{\overline{10}|i_I} + 500.000\ (1 + i_I)^{-10}$$

y su solución es:

$$i_I = 0{,}07392$$

Inversión II: El tanto de rendimiento es el valor i_{II} tal que:

$$4.650.000 = 365 \times 2.000\ \bar{a}_{\overline{8}|i_{II}} + 300.000\ (1 + i_{II})^{-8}$$

y su cuantía es:

$$i_{II} = 0{,}072084$$

La inversión aconsejable es la *I* pues proporciona un rendimiento unitario superior.

N. 40

Una finca produce unos beneficios anuales de 250.000 ptas. El dueño decide realizar unas mejoras, para obtener mayores rendimientos, que van a suponer los siguientes gastos:

En el primer año 800.000 ptas., en el segundo año 500.000 ptas., en el tercer año 150.000 ptas., y en el cuarto año 150.000 ptas.

Por otra parte tendremos que los nuevos beneficios que se esperan son:

- **Primero y segundo año ninguno.**
- **Tercero 350.000 ptas.**
- **Cuarto 500.000 ptas.**
- **A partir del quinto año va a ser de 600.000 ptas.**

Además:

a) Los impuestos se van a ver incrementados en 30.000 ptas. los dos primeros años y en 50.000 ptas., los siguientes. Los impuestos anuales antes de la transformación ascienden a 20.000 ptas., anuales.

b) Los gastos de administración supondrán 25.000 ptas., anuales y los de mantenimiento de caminos y demás 21.000 ptas.

Si el tanto de valoración de la finca es del 4 % y el de los demás capitales es el 6 % se pide:

1.° Ver si interesa la transformación.

2.° Valor potencial de la finca en este segundo caso.

Para que la inversión pueda llevarse a cabo tiene que verificarse que el valor actualizado al 6 % de los incrementos de ingresos sea mayor que el valor actualizado de los incrementos de gastos, es decir:

$$\Delta I(6\ \%) > \Delta G(6\ \%)$$

a) El incremento de ingresos es el siguiente:

	−250.000	−250.000	100.000	250.000	350.000	350.000	
0	1	2	3	4	5	6	....

y su cuantía

$$\Delta I = -250.000\ a_{\overline{2}|0{,}06} + 100.000\ (1+0{,}06)^{-3} + 250.000\ (1+0{,}06)^{-4} +$$

$$+ 350.000\ {}^{4}/a_{\overline{\infty}|0{,}06} = 4.444.183{,}53$$

b) Valor del incremento de gastos:

– Gastos de inversión = G_I. Se suponen fraccionados en meses dentro de cada año y es su representación:

	800.000		500.000		150.000		150.000	
0		1		2		3		4

y su cuantía

$$G_I = 800.000\,\frac{0{,}06}{j_{(12)}}\,(1+0{,}06)^{-1} + 500.000\,\frac{0{,}06}{j_{(12)}}\,(1+0{,}06)^{-2} +$$

$$+\,150.000\;{}^{2/}a^{(12)}_{\overline{2}|0,06} = 1.483.762{,}16$$

– Valor del incremento de impuestos = G_T. – Se evalúan en:

$$G_T = a_{\overline{2}|0,06} + 50.000\;{}^{2/}a_{\overline{\infty}|0,06} = 796.665{,}48$$

– Gastos varios = G_V. – Formados por los de administración y mantenimiento de caminos que los supondremos fraccionados, de donde:

$$G_V = 46.000\;a^{(12)}_{\overline{\infty}|0,06} = 787.520{,}20$$

El incremento de gastos resultante es:

$$\Delta G = G_I + G_T + G_V = 3.067.947{,}84$$

Por tanto de

$$\Delta I(6\ \%) = 4.444.183{,}53 > 3.067.947{,}84 = \Delta G(6\ \%)$$

se deduce que interesa la transformación.

2.º) El valor potencial o valor capitalizado de la finca es el obtenido a través de la actualización de su renta neta, diferencia entre los ingresos y gastos actualizados al 4 %. Este es:

$$V = [350.000\,(1+0{,}04)^{-3} + 500.000\,(1+0{,}04)^{-4} + 600.000\;{}^{4/}a_{\overline{\infty}|0,04}] -$$

$$-\,[(50.000\;a_{\overline{2}|0,04} + 70.000\;{}^{2/}a_{\overline{\infty}|0,04}) + 46.000\;a^{(12)}_{\overline{\infty}|0,04}] =$$

$$= 13.560.613{,}67 - 2.883.226{,}37 = 10.677.387{,}30$$

N. 41

El ayuntamiento de cierta ciudad concede a la Empresa X la explotación de una línea de transportes con arreglo a las siguientes condiciones:

a) La concesionaria abonará al Ayuntamiento 1.000.000 de ptas., en el momento de la formalización de la concesión y 300.000 ptas., al *principio de cada uno de los años siguientes de la explotación del servicio*. La concesión es por 20 años.

b) El precio del billete estará formado por el precio de coste y unos recargos del 15 % y del 20 % destinados a atender los beneficios brutos de la Empresa y al Seguro colectivo de viajeros respectivamente.

Los gastos que se necesitan realizar para la adquisición de autobuses y su mantenimiento, tanto en el momento inicial como en los sucesivos periodos, son los de la siguiente relación:

1) 5.000.000 de ptas., en el momento actual para adquisición de autobuses.

2) Cada dos años hay que realizar reparaciones generales que se estiman en el 10 % del coste inicial.

3) Cada 4 años se deben renovar vehículos vendiéndose los antiguos por el 30 % de su coste.

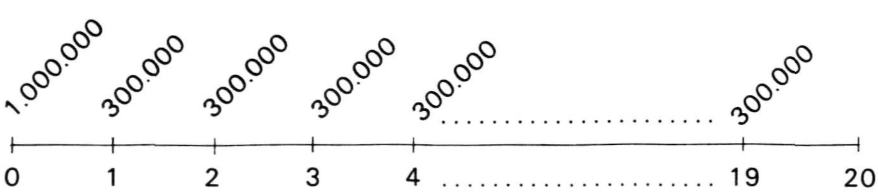
Si por término medio se calcula que la línea van a utilizarla 20.000 personas por mes en cada uno de los cinco primeros años, 22.000 en los cinco siguientes y 25.000 en los restantes 10 años. ¿Cuál será el importe que habrán de abonar los usuarios en cada trayecto si el tanto a utilizar para la valoración es el 6 % anual?

El precio de coste del billete se determina a través de la igualdad $I_T(p) = C_T$, de valores actualizados de los costes totales y de los ingresos en función del precio de coste del billete.

A.– COSTES TOTALES: C_T

1.º Costes de concesión $= C_c$

El esquema de éstos es



de donde

$$C_c = 1.000.000 + 300.000\ a_{\overline{19}|0,06} = 4.347.434,95$$

2) Costes de adquisición de autobuses $= C_a$

Son los recogidos en el esquema

y su valor actualizado

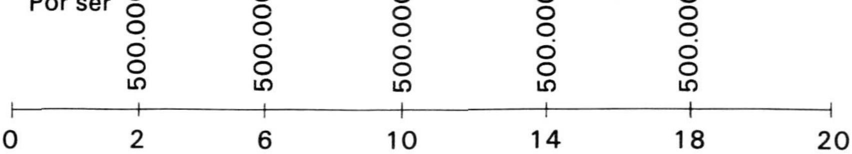
$$C_a = 5.000.000\left[1 + (1+0,06)^{-4} + (1+0,06)^{-8} + \right.$$
$$\left. + (1+0,06)^{-12} + (1+0,06)^{-16}\right] =$$

$$= 5.000.000\ \frac{1-(1+0,06)^{-20}}{1-(1+0,06)^{-4}} = 5.000.000\ \frac{\dfrac{1-(1+0,06)^{-20}}{0,06}}{\dfrac{1-(1+0,06)^{-4}}{0,06}} =$$

$$= 5.000.000\ \frac{a_{\overline{20}|0,06}}{a_{\overline{4}|0,06}} = 16.550.608,31$$

3) Costes de reparaciones de autobuses $= C_r$.

Por ser



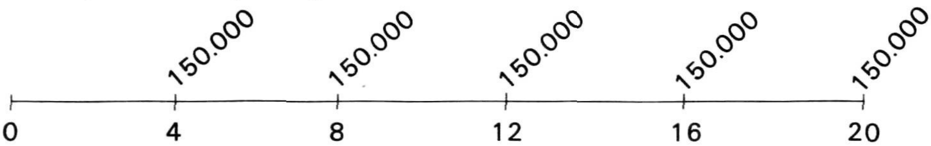
su cuantía asciende a:

$$C_r = 500.000\ (1+0,06)^{-2}\left[1 + (1+0,06)^{-4} + \ldots + (1+0,06)^{-16}\right] =$$

$$= 500.000\ (1+0,06)^{-2}.\ a_{\overline{20}|0,06}\ a^{-1}_{\overline{4}|0,06} = 1.472.998,25$$

4) Ingresos venta de vehículos usados $= I_a$

Se producen según el gráfico



y asciende a:

$$I_a = 1.500.000\ (1 + 0{,}06)^{-4}\ a_{\overline{20}|0{,}06}\ a^{-1}_{\overline{4}|0{,}06} = 3.932.889{,}57$$

Por tanto, los costes totales son:

$$C_T = C_c + C_a + C_r - I_a = 18.438.151{,}94$$

B.– INGRESOS TOTALES: $I_T(p)$

El esquema de los ingresos es:

20.000 p 12 año
0 ⊢—⊣ 5
22.000 p 12 año
5 ⊢—⊣ 10
25.000 p 12 año
10 ⊢—⊣ 20

Por ser los ingresos de tipo continuo, su valor actualizado, en función del precio incógnita p, es:

$$I_T(p) = 240.000\ p\ \bar{a}_{\overline{5}|0{,}06} + 264.000\ p\ {}^{5}/\bar{a}_{\overline{5}|0{,}06} +$$

$$+ 300.000\ p\ {}^{10}/\bar{a}_{\overline{10}|0{,}06} = 3.166.268{,}21\ p$$

La igualdad entre ingresos y costes se concreta en:

$$I_T(p) = 3.166.268{,}21\ p = 18.438.151{,}94 = C_T$$

y de ella se sigue que el precio de coste es:

$$p = 5{,}8232$$

El precio que abonará el usuario resulta en:

$$P = p + 0{,}15\,p + 0{,}20\,p = 1{,}35\,p = 7{,}861 \text{ ptas.}$$

N. 42

Una empresa se plantea una inversión que viene determinada por las siguientes características.

– Es posible conseguir lanzar 10.000 unidades producto en cada mes durante el 1.^{er} año y se espera que en los 4 periodos siguientes se vea incrementada la producción en un 10 % anual sobre la cantidad inicial. En los 3 años siguientes la producción se estabilizará y en los 4 años siguientes la producción descenderá un 15 % anual sobre el tope máximo alcanzado.

– Hay que realizar una inversión inicial de 10.000.000 y una complementaria de 2.000.000 anuales en cada uno de los 4 años siguientes al primero. Los gastos de mantenimiento de los equipos se estiman en un 5 % anua del valor invertido del equipo.

– Valor residual 8.000.000 de ptas.

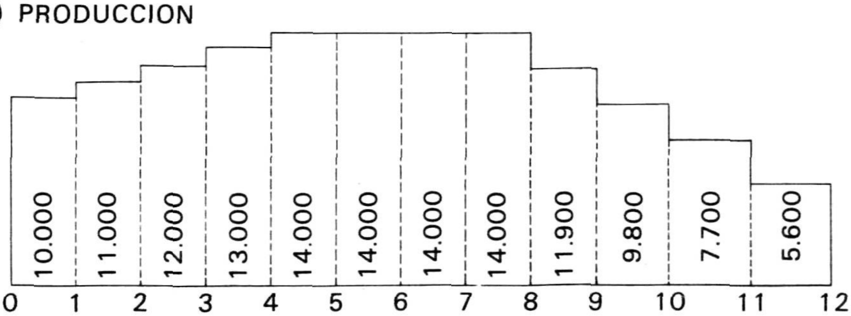
– La plantilla percibirá mensualmente 500.000 ptas. y los trienios son el 5 %.

***Sobre la base de todos estos datos y si la remuneración al capital* es del 7 % determinar el precio de coste de cada artículo que se va a producir.**

Para determinar el precio de coste se debe calcular el valor de los ingresos en función de p (precio de coste) y el valor de los coste, en el momento inicial. La igualación de $I_{(p)}$ con C dará la solución de p.

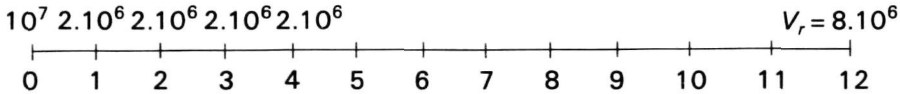
Los esquemas de producción y costes son:

A) PRODUCCION

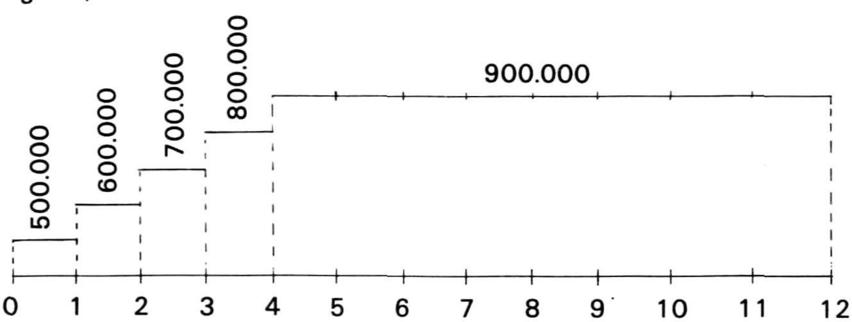


B) COSTES

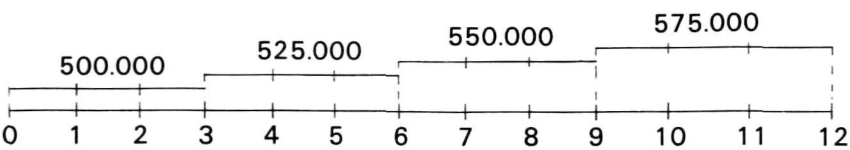
– Costes de inversión: C_I



– Costes de mantenimiento: C_M (se supone su devengo mensual pospagable)



– Costes de salarios: C_s (el gráfico recoge la cuantía mensual)



A') DETERMINACION DE LOS INGRESOS:

– Periodos 1.º al 4.º

$$I_1(p) = A^{(12)}_{(120.000\,p\ ;\ 12.000\,p)\ 4|0,07} = 478.710,73\ p$$

– Periodos 5.º al 8.º

$$I_2(p) = 168.000\ p\ {}^{4}/a^{(12)}_{4|0,07} = 447.888,35\ p$$

– Periodos 9.º al 12.º

$$I_3(p) = {}^{8}/A^{(12)}_{(142.800\,p\ ;\ -25.200\,p)\ 4|0,07} = 217.886,50\ p$$

– Ingresos totales:

$$I_T(p) = I_1(p) + I_2(p) + I_3(p) = 1.144.485{,}58\ p$$

B') DETERMINACION DE LOS COSTES:

– Costes de inversión

$$C_I = 10.000.000 + 2.000.000\ a_{\overline{4}|0,07} - 8.000.000\ (1 + 0{,}07)^{-12} =$$

$$= 13.222.326{,}89$$

– Costes de mantenimiento

$$C_M = A^{(12)}_{(500.000\ ;\ 100.000)\ \overline{4}|0,07} + 900.000\ {}^{4}/a^{(12)}_{\overline{8}|0,07} = 6.471.857{,}64$$

– Costes de salarios

$$C_s = 6.000.000\ a^{(12)}_{\overline{3}|0,07} + 6.300.000\ {}^{3}/a^{(12)}_{\overline{3}|0,07} + 6.600.000\ {}^{6}/a^{(12)}_{\overline{3}|0,07} +$$

$$+ 6.900.000\ {}^{9}/a^{(12)}_{\overline{3}|0,07} = 52.237.751{,}13$$

– Costes totales

$$C_T = C_I + C_M + C_s = 71.931.935{,}66$$

C') DETERMINACION DEL PRECIO DE COSTE

De la ecuación

$$I_T(p) = 1.144.485{,}58\ p = 71.931.935{,}66 = C_T$$

se sigue:

$$p = 62{,}8509 \text{ ptas.}$$

N. 43

Se proyecta montar una planta industrial formada por dos sectores de instalaciones para fabricar sus productos, interviniendo los dos en el proceso fabril.

Las características son:

	Costes de los equipos	Costes de mantenimiento	Vida útil	Valor residual
SECTOR I	**1.000.000**	**100.000 año**	**2 años**	**200.000**
SECTOR II	**5.000.000**	**100.000 año**	**5 años**	**1.000.000**

Sabiendo que se van a producir 100 unidades de producto diario y que hay 250 días de trabajo al año determinar la repercusión de las instalaciones en cada unidad de producto fabricado si el estudio económico se realiza para un periodo de diez años y el tipo de interés es el 7,5 % anual.

Designando por R la repercusión en cada unidad que se va a fabricar tendrá que verificarse que el valor actualizado de los ingresos de las repercusiones sea igual al valor actualizado de los coste, es decir

$$I(R) = C_T$$

A) COSTES ACTUALIZADOS

1.º Costes de instalación de los equipos: C_E

a) Sector I

$$C_I = 1.000.000 \left[(1 + (1 + 0{,}075)^{-2} + (1 + 0{,}075)^{-4} + (1 + 0{,}075)^{-6} + \right.$$

$$\left. + (1 + 0{,}075)^{-8}\right] = 1.000.000\ a_{\overline{10}|0{,}075}\ a^{-1}_{\overline{2}|0{,}075} = 3.822.796{,}81$$

b) Sector II

$$C_{II} = 5.000.000 \left[1 + (1 + 0{,}075)^{-5}\right] = 8.482.793{,}15$$

El coste de instalación es:

$$C_E = C_I + C_{II} = 12.305.589{,}96$$

2.º Costes de mantenimiento: C_n

$$C_M = (100.000 + 100.000)\ a_{\overline{10}|0{,}075} = 1.372.816{,}19$$

3.º Valores residuales: V_R

a) Sector I

$$V_I = 200.000\,(1+0{,}075)^{-2}\, a_{\overline{10}|0{,}075}\, a^{-1}_{\overline{2}|0{,}075} = 661.598{,}15$$

b) Sector II

$$V_{II} = 1.000.000\left[(1+0{,}075)^{-5} + (1+0{,}075)^{-10}\right] = 1.181.752{,}56$$

de donde

$$V_R = V_I + V_{II} = 1.843.350{,}71$$

4.º Costes totales: C_T

$$C_T = C_E + C_M - V_R = 11.835.055{,}44$$

B) INGRESOS ACTUALIZADOS EN FUNCION DE R

$$I(R) = 250 \times 100 \times R\, \bar{a}_{\overline{10}|0{,}075} =$$

$$= 25.000\, R\, \frac{0{,}075}{\log_e (1+0{,}075)}\, a_{\overline{10}|0{,}075} = 177.959{,}54\, R$$

C) CALCULO DE R

La ecuación

$$I(R) = 177.959{,}54\, R = 11.835.055{,}44 = C_T$$

da la solución:

$$R = 66{,}504 \text{ ptas.}$$

N. 44

Tres hermanos reciben en herencia por partes iguales:

a) Una finca rústica que produce 100.000 ptas. anuales.

b) Un título bancario de nominal 700.000 ptas. que produce intereses al 5 % faltando 5 años para vencer el principal.

Para poder conseguir cada uno su parte acuerdan:

1.º Que uno de los hermanos reciba durante los 5 años inmediatos los rendimientos de la finca y del título. La cantidad que falte para cubrir su parte se le entregará del principal del título a su vencimiento.

2.º Otro percibirá el sobrante del principal del título y los rendimientos de la finca durante los años que sea necesario.

3.º El tercero entrará en posesión de la plena propiedad de la finca en su día.

Si el tipo de interés a utilizar es el mismo que el del título bancario ***se pide:***

1.º Cantidad que corresponde del principal del título a la parte primera.

2.º Durante cuántos años debe percibir la segunda parte los rendimientos de la finca.

3.º Si el poseedor de la tercera parte quiere entrar en posesión de la plena propiedad dentro de 12 años ¿qué cantidad tendría que entregar al poseedor de la segunda parte?

El valor de la herencia es:

$$V = 100.000\ a_{\overline{\infty}|0,05} + 700.000 = 2.700.000$$

por lo que el valor de cada parte es de 900.000 ptas.

1.º La cantidad que corresponde del principal del título, que se designa por X, se obtiene en la ecuación:

$$900.000 = (100.000 + 35.000)\ a_{\overline{5}|0,05} + X\ (1 + 0,05)^{-5}$$

y su cuantía es:

$$X = 402.693,18$$

2.º El valor de la segunda parte al principio del sexto año asciende a

$$900.000\ (1 + 0,05)^{5} = 1.148.653,40$$

pero al recibir en ese momento su parte de principal del título que asciende a

$$700.000 - 402.693{,}18 = 297.306{,}82$$

el crédito pendiente supone

$$1.148.653{,}40 - 297.306{,}82 = 851.346{,}58$$

que deberá recibirse a través de los rendimientos de la finca durante un cierto número de periodos que habrá que determinar.

La ecuación

$$851.346{,}58 = 100.000\, a_{\overline{n}|0{,}05}$$

da el valor de n. Despejando,

$$a_{\overline{n}|0{,}05} = 8{,}5134658$$

En las tablas se tiene

$$a_{\overline{11}|0{,}05} = 8{,}30641422 \;\; ; \;\; a_{\overline{12}|0{,}05} = 8{,}86325164$$

lo cual indica que el valor de los rendimientos de once años es menor que el crédito pendiente y el valor de los rendimientos de doce años es mayor por lo que la solución a adoptar para que la herencia cumpla con las tres partes es que se reciban los rendimientos durante los once años y los del doceavo sean repartidos entre las partes segunda y tercera debiendo calcular la que corresponde a cada uno.

Si Y representa la cuantía correspondiente a la segunda parte, ésta satisface la ecuación:

$$851.346{,}58 = 100.000\, a_{\overline{11}|0{,}05} + Y\,(1 + 0{,}05)^{-11}$$

de donde

$$Y = 35.412{,}80$$

y queda la cantidad restante, que asciende a 64.587,20 para la tercera parte.

3.º Una vez transcurridos doce años el valor de los derechos pendientes de la segunda es:

$$100.000\ a_{\overline{4}|0,05} + 35.412,80\ (1 + 0,05)^{-5} = 382.341,84 \text{ ptas.}$$

cantidad que deberá entregar el poseedor de la tercera parte para obtener la plena propiedad.

N. 45

Cierta S. A. ha conseguido la concesión para la construcción y explotación de un túnel de peaje con arreglo a las siguientes características:

I.– CONDICIONES DE LA CONCESION

– Duración de la concesión 42 años al cabo de los cuales revierte al organismo público correspondiente.

– Capacidad de paso de 600.000 vehículos mensuales.

– Abono de un canon de 2 ptas. por vehículo que transite al organismo público correspondiente teniendo que liquidarse dichas cantidades al final de cada año.

II.– COSTES DE LA INVERSION

a.– De Construcción:

– Desembolso de cien millones de ptas. en estos momentos para adquisición de maquinaria, equipos, materiales, etc.

– Desembolso de veinte millones de ptas. mensualmente durante el primer año de obras.

– Desembolso de diez millones de ptas. mensuales durante el segundo año de obras.

b.– De Mantenimiento:

– Diez millones de ptas. anuales para hacer frente a los gastos normales.

– Cada tres años de servicio hay que proceder a reasfaltar la carretera invirtiendo en dicha operación quince millones de ptas. (a efectos de cálculo se supone que todos los pagos se efectúan al final del año quinto, del octavo o del onceavo que son en los que se realizan los reasfaltados).

– Cada diez años de servicio hay que efectuar unos gastos extraordinarios de cincuenta millones de ptas. de cuantía.

III.– CIRCULACION ESTIMADA DE VEHICULOS

– Durante los dos primeros años de la concesión ninguno, por estar en periodo de obras.

– Durante el tercer año se espera circulen 100.000 vehículos por mes durante los meses de enero a mayo y de octubre a diciembre, de junio a septiembre la circulación será de 200.000 vehículos.

– En los años sucesivos la circulación se verá incrementada en un 10 % anual sobre las cifras del tercer año hasta el máximo de capacidad señalado en el apartado I.

IV.– OTRAS CARACTERISTICAS

– El tipo de interés del mercado es el 7 % anual efectivo.

– Durante el primer año de explotación se pagarán en impuestos diez millones de ptas. y en los sucesivos esta cifra se incrementará acumulativamente un 5 %.

Determinar:

1.º Precio de coste del peaje por vehículo (incluyendo impuestos).

2.º Precio que abonará el usuario si hay unos recargos del 10 % sobre el precio de coste para remunerar al empresario y los impuestos indirectos, que recaen en el usuario, son el 15 %.

3.º Cantidades constantes que se necesitarán detraer anualmente de forma que colocadas a un tipo de interés del 7 % permitan hacer frente a los gastos de mantenimiento extraordinarios.

4.º Beneficio actualizado de la inversión.

1.º PRECIO DE COSTE DEL PEAJE POR VEHICULO

El precio de coste es el valor p, que se obtiene en la ecuación

$$I(p) = C_T$$

que iguala los costes totales actualizados a los ingresos actualizados función de p.

A) COSTES

1.– Costes de inversión: C_I

a) De construcción

$$C_a = 100.000.000 + 20.000.000 \times 12 \frac{0{,}07}{j_{(12)}} (1+0{,}07)^{-1} +$$

$$+ 10.000.000 \times 12 \frac{0{,}07}{j_{(12)}} (1+0{,}07)^{-2} = 439.544.458{,}70$$

b) De mantenimiento:

– Anuales

$$C_{b,\,1} = 10.000.000\ {}^{2}/a_{\overline{40}|0{,}07} = 116.444.308{,}30$$

– Trianuales

$$C_{b,\,2} = 15.000.000 \left[(1+0{,}07)^{-5} + (1+0{,}07)^{-8} + \ldots\ldots + (1+0{,}07)^{-41}\right] =$$

$$= 15.000.000\ (1+0{,}07)^{-5}\ a_{\overline{39}|0{,}07}\ a^{-1}_{\overline{3}|0{,}07} = 54.058.146{,}98$$

– Cada diez años de servicio

$$C_{b,\,3} = 50.000.000 \left[(1+0{,}07)^{-12} + (1+0{,}07)^{-22} + (1+0{,}07)^{-32}\right] =$$

$$= 39.223.312{,}50$$

Los costes de mantenimiento son:

$$C_b = C_{b,\,1} + C_{b,\,2} + C_{b,\,3} = 209.725.767{,}78$$

c) Costes de inversión

$$C_I = C_a + C_b = 649.270.226{,}48$$

2.– Costes correspondientes al canon de circulación: C_c

Los vehículos que circulan en los meses no veraniegos durante el primer año de servicio son

$$8 \times 100.000 = 800.000$$

durante los siguientes años aumentan las cifras en el 10 % anual sobre las 800.000 por lo que a 2 ptas. por vehículo se tiene la siguiente renta:

$$C_{c,1} = {}^{2}/\mathrm{A}_{(1.600.000\ ;\ 160.000)\ \overline{40}|\,0{,}07} =$$

$$= (1 + 0{,}07)^{-2} \left[\left(1.600.000 + \frac{160.000}{0{,}07} + 160.000 + 40\right) a_{\overline{40}|\,0{,}07} - \right.$$

$$\left. - \frac{160.000 \times 40}{0{,}07} \right] = 39.914.033{,}25$$

Durante los meses veraniegos circulan en el primer año

$$4 \times 200.000 = 800.000$$

y en los sucesivos aumenta un 10 % anual sobre esta cifra pero no en todos, pues la pista se satura en el año veintiuno del servicio por lo que se tendrá:

$$C_{c,2} = {}^{2}/\mathrm{A}_{(1.600.000\ ;\ 160.000)\ \overline{21}|\,0{,}07} + 600.000 \times 2 \times 4\ {}^{23}/a_{\overline{19}|\,0{,}07} =$$

$$= 26.649.606{,}82 + 10.465.255{,}57 = 37.144.862{,}39$$

Los costes de este apartado se estiman en:

$$C_c = C_{c,1} + C_{c,2} = 77.028.895{,}64$$

3.– Impuestos: T

Su valor actualizado asciende a:

$$T = {}^{2}/\mathrm{A}_{(10.000.000\ ;\ 1{,}05)\ \overline{40}|\,0{,}07} = 231.403.125{,}60$$

4.– Costes totales: C_T

$$C_T = C_I + C_c + T = 649.270.226{,}48 + 77.028.895{,}64 +$$

$$+ 231.403.125{,}60 = 957.702.247{,}72$$

B) INGRESOS

El cálculo de los ingresos se divide en dos partes, una para los meses no veraniego y otra para los veraniegos. Así:

1.– Ingresos meses no veraniegos: $I_{\mathrm{NV}}(p)$

En un año cualquiera el esquema de las cantidades a ingresar es:

	C_s	C_s	C_s	C_s	C_s					C_s	C_s	C_s
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	E	F	M	A	MY	J	JU	AG	S	O	N	D

siendo C_s el resultado de multiplicar el número de vehículos que circulan en el mes por p.

El valor de estas cantidades a fin de año es:

$$C_s \left[(1+0{,}07)^{\frac{11}{12}} + (1+0{,}07)^{\frac{10}{12}} + \ldots + (1+0{,}07)^{\frac{7}{12}} +\right.$$

$$\left. + (1+0{,}07)^{\frac{2}{12}} + (1+0{,}07)^{\frac{1}{12}} + 1\right] = 8{,}27762482\ C_s$$

Por variar C_s en progresión aritmética de razón 10.000 p y ser el primer término de la progresión 100.000 p se tiene:

$$I_{\mathrm{NV}}(p) = 8{,}27762482\ {}^{2}/A_{(100.000\,p\ ;\ 10.000\,p)\ \overline{40|}\,0{,}07} =$$

$$= 8{,}27762482\ (1+0{,}07)^{-2} \left[\left(100.000\,p + \frac{10.000\,p}{0{,}07} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + 40.000\,p\right) a_{\overline{40|}\,0{,}07} - \frac{400.000\,p}{0{,}07}\right] = 20.649.587{,}08\,p$$

2.– Ingresos meses veraniegos: $I_V(p)$.

En un año cualquiera el esquema de las cantidades a ingresar es:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & C'_s & C'_s & C'_s & C'_s & & & \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ & E & F & M & A & MAY & JUN & JUL & AG & S & O & N & D \end{array}$$

y el valor de estas cantidades a fin de año

$$C'_s\left[(1+0{,}07)^{\frac{6}{12}} + (1+0{,}07)^{\frac{5}{12}} + (1+0{,}07)^{\frac{4}{12}} + (1+0{,}07)^{\frac{3}{12}}\right] =$$

$$= 4{,}10286792\ C'_s$$

Las cifras del primer año de servicio son

$$200.000\ p$$

y las demás varían en progresión aritmética de razón 20.000 p; pero los aumentos anuales tienen un tope que es la capacidad máxima del túnel por lo que hay que determinar el número de términos de la progresión que es,

$$S \cdot 20.000 + 200.000 = 600.000$$

despejando

$$S = \frac{400.000}{20.000} = 20$$

luego a los 20 + 1, veintiún año de servicio, se alcanza el máximo de capacidad. En los sucesivos périodos de explotación será constante.

El valor de los ingresos en los meses veraniegos ascienden a:

$$I_V(p) = 4{,}10286792\ \left[{}^{2}/A_{(200.000\,p\ ;\ 20.000\,p)\ \overline{21}|\,0{,}07} + \right.$$

$$\left. + 600.000\ p\ {}^{23}/a_{\overline{19}|\,0{,}07}\right] = 19.034.672{,}28\ p$$

3.– Valor total de los ingresos: $I(p)$

$$I(p) = I_{NV}(p) + I_V(p) = 39.684.259{,}36\ p$$

c) PRECIO DE COSTE POR VEHICULO

De la ecuación

$$I(p) = 39.684.259{,}36\ p = 957.702.247{,}72 = C_T$$

se deduce

$$p = 24{,}133$$

2.º PRECIO QUE ABONARA EL USUARIO

Este es:

$$P = p + 0{,}10\ p + 0{,}15\ P$$

o sea

$$P = \frac{1{,}10}{0{,}85}\ p = \frac{1{,}10}{0{,}85}\ 24{,}133 = 31{,}23 \text{ ptas.}$$

3.º Cantidades necesarias para gastos de mantenimiento extraordinarios

Para hacer frente a los gastos trianuales se necesita una cuantía X tal que

$$X\ S_{\overline{3}|\,0{,}07} = 15.000.000$$

y despejando

$$X = 4.665.774{,}97$$

La atención de los gastos extraordinarios que se producen cada diez años requiere uan previsión anual Y que satisface la ecuación

$$Y\ S_{\overline{10}|\,0{,}07} = 50.000.000$$

para

$$Y = 3.618.874{,}95$$

pero esta cantidad solamente se detraerá en los treinta primeros años de explotación pues cuando debería efectuarse el siguiente gasto por este concepto termina la concesión.

4.º BENEFICIO ACTUALIZADO

Por ser el beneficio actualizado para $p = 24{,}133$ cero, pues, entonces se verifica que $I(p) = C_T$, para obtener el beneficio actualizado de la inversión bastará tomar el valor actualizado del incremento de ingresos que se produce como consecuencia de percibir la empresa un precio

$$P' = p + 0{,}10\ p$$

por lo que

$$\Delta p = 0{,}10\ p$$

y en consecuencia se tiene

$$B = \Delta I(p) = 0{,}10\ I(p) = 39.684.259{,}36 \times 0{,}10 \times 24{,}133 =$$

$$= 95.770.023{,}11 \text{ ptas.}$$

TERCERA PARTE

OPERACIONES FINANCIERAS

SECCION PRIMERA

OPERACIONES SIMPLES

SUPUESTOS
DE
OPERACIONES SIMPLES

N. 1

En el momento actual, se entrega en concepto de prestación un capital de cuantía C_0 para recibir su equivalente dentro de n años. Si la operación se pacta con una ley de capitalización, cuyo rédito para el año s es i_s, determinar:

1.º Cuantía del capital de la contraprestación.

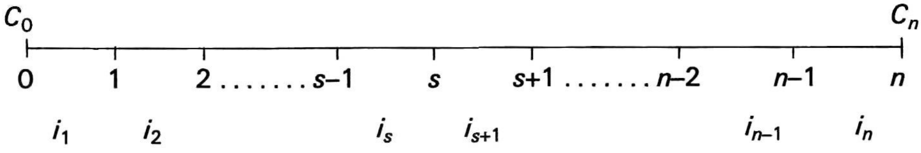
2.º Reserva o saldo al final del año s, por los métodos retrospectivo y prospectivo.

3.º Reserva o saldo al final del año s, en función del saldo del periodo anterior.

4.º Aplicar los resultados obtenidos en los puntos anteriores, a una operación definida por las siguientes características:

- **$C_0 = 2.000.000$ ptas.**
- **$n = 8$ años.**
- **Réditos: $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = 0{,}10$; $i_5 = i_6 = 0{,}11$; $i_7 = 0{,}12$; $i_8 = 0{,}13$.**
- **Reserva en $s = 4$.**

Representando por C_n a la cuantía del capital a percibir dentro de n años, la operación definida queda recogida en la siguiente gráfica:



y se tiene:

1.° *Cuantía del capital de la contraprestación*

$$C_n = C_0 \prod_{h=1}^{n} (1 + i_h)$$

2.° Reserva al final del año s:

– método retrospectivo

$$C_s = C_0 \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)$$

– método prospectivo

$$C_s = C_n \prod_{h=s+1}^{n} (1 + i_h)^{-1}$$

3.° Reserva por recurrencia

$$C_s = C_{s-1} (1 + i_s)$$

4.° Para los valores indicados resulta:

$$C_{10} = 2.000.000 (1 + 0{,}10)^4 (1 + 0{,}11)^2 (1 + 0{,}12) (1 + 0{,}13) =$$

$$= 4.566.076{,}25$$

$$C_4 = 2.000.000 (1 + 0{,}10)^4 = 2.928.200$$

$$C_4 = 4.566.076{,}25 (1 + 0{,}11)^{-2} (1 + 0{,}12^{-1} (1 + 0{,}13)^{-1} = 2.928.200$$

Las reservas por recurrencia son:

$C_1 = 2.000.000 (1 + 0{,}10) = 2.200.000$; $C_2 = C_1 (1 + 0{,}10) = 2.420.000$

$C_3 = C_2 (1 + 0{,}10) = 2.662.000$; $C_4 = C_3 (1 + 0{,}10) = 2.928.200$

$C_5 = C_4 (1 + 0{,}11) = 3.250.302$; $C_6 = C_5 (1 + 0{,}11) = 3.607.835{,}22$

$C_7 = C_6 (1 + 0{,}12) = 4.040.775{,}45$; $C_8 = C_7 (1 + 0{,}13) = 4.566.076{,}25$

N. 2

Se presta un capital de 500.000 ptas., para recibir dentro de seis años la contraprestación equivalente. Si el rédito anual concertado es constante e igual al 12 %, determinar la reserva por recurrencia de cada uno de los años, los intereses generados en cada periodo, así como su separación en los que corresponden a la cuantía inicial y los producidos por los intereses de los periodos anteriores.

Al ser los réditos periodales constantes se tiene:

$$C_1 = C_0\,(1 + i) = 500.000\,(1 + 0{,}12)$$

$$C_s = C_{s-1}\,(1 + i) = C_{s-1}\,(1 + 0{,}12)$$

$$I_s = C_s - C_{s-1} = C_{s-1}\,i = I_{s-1}\,(1 + i) \text{ con } I_1 = 500.000 \times 0{,}12$$

$$I_s = C_{s-1}\,i = C_0\,(1 + i)^{s-1}\,i = C_0 i + C_0\left[(1 + i)^{s-1} - 1\right] i = I'_s + I''_s$$

y en consecuencia resulta:

Años	Reserva C_s	Intereses I_s	Descomposición de intereses I'_s	I''_s
Origen	500.000,00	—	—	—
1	560.000,00	60.000,00	60.000	0.000,00
2	627.200,00	67.200,00	60.000	7.200,00
3	702.464,00	75.264,00	60.000	15.264,00
4	786.759,68	84.295,68	60.000	24.295,68
5	881.170,84	94.411,16	60.000	34.411,16
6	986.911,34	105.740,50	60.000	45.740,50

N. 3

Se concierta una operación financiera simple en régimen de capitalización continua, si sus características son las recogidas en el gráfico:

C_0						C_n
0	ρ_1	s	ρ_2	$s+h$	ρ_3	h

con ρ tanto instantáneo, determinar:

1.° Valor de la contraprestación C_n.

2.° Reserva o saldo en el año r, por los métodos prospectivo y retrospectivo, para los supuestos: $r \in (0, s]$, $r \in (s, s+h]$ y $r \in (s+h, n]$.

3.° Reserva en $r_2 \in (s+h, n)$, en función de la reserva en $r_1 \in (0, s)$.

1.° Valor de la contraprestación

$$C_n = C_0 e^{\int_0^s \rho_1\, dt}\, e^{\int_s^{s+h} \rho_2\, dt}\, e^{\int_{s+h}^{n} \rho_3\, dt} =$$

$$= C_0\, e^{\rho_1 s} \,.\, e^{\rho_2 h} \,.\, e^{\rho_3 (n-s-h)} = C_0\, e^{\rho_3 n - (\rho_3 - \rho_1) s - (\rho_3 - \rho_2) h} =$$

$$= C_0\, (1+i_1)^s\, (1+i_2)^h\, (1+i_3)^{n-s-h}$$

con el cambio $\rho_1 = \lg_e (1+i_1)$, $\rho_2 = \lg_e (1+i_2)$, $\rho_3 = \lg_e (1+i_3)$.

2.° Reserva o saldo en el año r:

a) Supuesto: $r \in (0, s]$

– método retrospectivo

$$C_r = C_0\, e^{\int_0^r \rho_1\, dt} = C_0\, e^{\rho_1 r} = C_0\, (1+i_1)^r$$

– método prospectivo.

$$C_r = C_n\, e^{-\int_r^s \rho_1\, dt}\, e^{-\int_s^{s+h} \rho_2\, dt}\, e^{-\int_{s+h}^{n} \rho_3\, dt} = C_n\, e^{-\rho_1 (s-r) - \rho_2 h - \rho_3 (n-s-h)} =$$

$$= C_n\, (1+i_1)^{-(s-r)}\, (1+i_2)^{-h}\, (1+i_3)^{-(n-s-h)}$$

b) Supuesto $r \in (s, s+h]$

– método retrospectivo

$$C_r = C_0\, e^{\int_0^s \rho_1\, dt}\, e^{\int_s^r \rho_2\, dt} =$$

$$= C_0\, e^{\rho_1 s + \rho_2 (r-s)} = C_0\, (1+i_1)^s\, (1+i_2)^{r-s}$$

– método prospectivo

$$C_r = C_n\, e^{-\int_r^{s+h} \rho_2\, dt}\, e^{-\int_{s+h}^n \rho_3\, dt} =$$

$$= C_n\, e^{-\rho_2 (s+h-r) - \rho_3 (n-s-h)} = C_n\, (1+i_2)^{-(s+h-r)}\, (1+i_3)^{-(n-s-h)}$$

c) Supuesto $r \in (s+h, n]$

– método retrospectivo

$$C_r = C_0\, e^{\int_0^s \rho_1\, dt}\, e^{\int_s^{s+h} \rho_2\, dt}\, e^{\int_{s+h}^r \rho_3\, dt} = C_0\, e^{\rho_1 s + \rho_2 h + \rho_3 (r-s-h)} =$$

$$= C_0\, (1+i_1)^s\, (1+i_2)^h\, (1+i_3)^{r-s-h}.$$

– método prospectivo

$$C_r = C_n\, e^{-\int_r^n \rho_3\, dt} = C_n\, e^{-\rho_3 (n-r)} = C_n\, (1+i_3)^{-(n-r)}$$

3.º Reserva en $r_2 \in (s+h, n)$, en función de la reserva en $r_1 \in (0, s)$

$$C_{r_2} = C_{r_1}\, e^{\int_{r_1}^s \rho_1\, dt}\, e^{\int_s^{s+h} \rho_2\, dt}\, e^{\int_{s+h}^{r_2} \rho_3\, dt} =$$

$$= C_{r_1}\, e^{\rho_1 (s-r_1) + \rho_2 h + \rho_3 (r_2-s-h)} = C_{r_1}\, (1+i_1)^{s-r_1}\, (1+i_2)^h\, (1+i_3)^{r_2-s-h}$$

N. 4

Calcular, el tanto medio a que resulta la operación descrita en el ejercicio N. 1.

La operación del ejercicio primero está definida por una prestación de cuantía C_0 = 2.000.000, una duración de ocho años, unos réditos variables y una contraprestación.

$$C_8 = C_0 \prod_{h=1}^{8} (1 + i_h) = 4.566.076{,}25$$

Se denomina tanto medio de la operación al tanto constante i_m asociado a los correspondientes periodos mediante el cual se sigue verificando la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación, es decir:

$$C_8 = C_0 \prod_{h=1}^{8} (1 + i_h) = C_0 (1 + i_m)^8$$

De esta relación se sigue:

$$i_m = \sqrt[8]{\frac{C_8}{C_0}} - 1 = \sqrt[8]{\prod_{h=1}^{8} (1 + i_h)} - 1$$

y en consecuencia se tiene:

$$i_m = \sqrt[8]{\frac{4.566.076{,}25}{2.000.000}} - 1 = 0{,}1087$$

e igualmente

$$i_m = \sqrt[8]{(1 + 0{,}10)^4 (1 + 0{,}11)^2 (1 + 0{,}12) (1 + 0{,}13)} - 1 = 0{,}1087$$

N. 5

Calcular el tanto instantáneo medio y el tanto medio de la operación definida en el ejercicio N. 3.

Aplicar los resultados obtenidos para los valores $\rho_1 = 0{,}07$, $\rho_2 = 0{,}08$, $\rho_3 = 0{,}09$, $n = 10$, $s = 4$ y $h = 4$.

La equivalencia financiera al final de la operación es:

$$C_n = C_0\, e^{\int_0^s \varrho_1\, dt}\; e^{\int_s^{s+h} \varrho_2\, dt}\; e^{\int_{s+h}^n \varrho_3\, dt} =$$

$$= C_0\, e^{\varrho_1 s + \varrho_2 h + \varrho_3 [n - (s+h)]}$$

El tanto instantáneo medio ϱ_m, es el valor que verifica la igualdad:

$$C_n = C_0\, e^{\int_0^n \varrho_m\, dt} = C_0\, e^{\varrho_m n}$$

es decir, resulta:

$$\varrho_m\, n = \varrho_1\, s + \varrho_2\, h + \varrho_3\, [n - (s+h)]$$

y en consecuencia, su valor es:

$$\varrho_m = \frac{\varrho_1 s + \varrho_2 h + \varrho_3 [n - (s+h)]}{n}$$

El tanto medio, es el valor i_m tal que:

$$(1 + i_m)^n = (1 + i_1)^s\, (1 + i_2)^h\, (1 + i_3)^{n - (s+h)}$$

con $1 + i = e^{\varrho}$, y su valor es:

$$i_m = (1 + i_1)^{\frac{s}{n}}\, (1 + i_2)^{\frac{h}{n}}\, (1 + i_3)^{1 - \frac{s+h}{n}} - 1 = e^{\varrho_m} - 1$$

Para los valores del enunciado se tiene:

$$\varrho_m = \frac{0{,}07 \times 4 + 0{,}08 \times 4 + 0{,}09 \times 2}{10} = 0{,}078$$

$$i_1 = e^{0{,}07} - 1 = 0{,}0725 \;\; ; \;\; i_2 = e^{0{,}08} - 1 = 0{,}0833 \;\; ; \;\; i_3 = e^{0{,}09} - 1 \simeq 0{,}0942$$

$$i_m = (1 + 0{,}0725)^{\frac{4}{10}}\, (1 + 0{,}833)^{\frac{4}{10}}\, (1 + 0{,}0942)^{\frac{2}{10}} - 1 =$$

$$= e^{0{,}078} - 1 = 0{,}0811$$

N. 6

Sea una operación de préstamo simple con las siguientes características:

***a*) Contractuales**

– Cuantía del capital prestado, dos millones y medio de ptas.

– Duración de la operación, ocho años.

– Tipo de interés anual concertado, el 10 %.

***b*) Comerciales**

– Bonificación inicial, a favor del prestamista, del 1 % del capital prestado.

– Bonificación final, también a favor del prestamista, del mismo importe de la inicial.

– Gastos iniciales a cargo del prestamista de 2.000 ptas.

– Gastos iniciales a cargo del prestatario del 1,5 % del capital recibido en préstamo.

– Gastos finales a cargo del prestatario de la misma cuantía que los iniciales.

– Impuestos sobre los rendimientos, a cargo del prestamista, del 14 % sobre los intereses y bonificaciones devengables al final de la operación.

Determinar:

1.º Tanto efectivo del prestamista.

2.º Tanto efectivo del prestatario.

La contraprestación nominal o contractual es:

$$C_8 = 2.500.000\ (1 + 0{,}10)^8 = 5.358.972$$

Para calcular los tantos efectivos, es necesario obtener las magnitudes reales, recibidas y entregadas, por el prestamista y por el prestatario. Estas son:

a) Prestación real del acreedor o prestamista.

El prestamista desembolsa realmente en el origen la cuantía del contrato C_0, disminuida en la bonificación inicial más los gastos iniciales a su cargo.

El efectivo entregado es:

$$E_a^i = C_0 - 0{,}01\ C_0 + G_a^i = 2.500.000 - 25.000 + 2.000 = 2.477.000$$

b) Prestación real para el deudor o prestatario.

La prestación nominal C_0, se ve disminuida con la bonificación inicial y los gastos del origen. Por tanto, la prestación efectiva recibida es:

$$E_p^i = C_0 - 0{,}01\ C_0 - G_p^i = 2.500.000 - 25.000 - 37.500 = 2.437.500$$

c) Contraprestación real del prestatario.

Está formada, por la contraprestación nominal C_8, la bonificación final y los gastos finales, es decir:

$$E_p^f = C_8 + 0{,}01\ C_0 + G_p^f = 5.358.972 + 25.000 +$$

$$+ 37.500 = 5.421.472$$

d) Contraprestación real para el acreedor.

Es la cuantía que resulta de disminuir de la contraprestación nominal y la bonificación final, los impuestos sobre los rendimientos. O sea:

$$E_a^f = C_8 + 0{,}01\ C_0 - T_8 = C_8 + 0{,}01\ C_0 -$$

$$- \left[C_8 + 0{,}01\ C_0 - (C_0 - 0{,}01\ C_0)\right] 0{,}14 = 5.358.972 + 25.000 -$$

$$- 407.256{,}08 = 4.976.715{,}92$$

Las equivalencias financieras reales, determinan los tantos efectivos y se tiene:

1.º Para el acreedor o prestamista

$$E_a^f = 4.976.715{,}92 = 2.477.000\ (1 + i_a)^8 = E_a^i\ (1 + i_a)^8$$

$$i_a = 0{,}091132$$

2.º Para el prestatario o deudor

$$E_p^f = 5.421.472 = 2.437.500\ (1 + i_p)^8 = E_p^i\ (1 + i_p)^8$$

$$i_p = 0{,}105087$$

N. 7

Sea una operación financiera simple, concertada a un tipo de interés anual $i = 0{,}10$, en la que se prestan 1.750.000 ptas. para recibir su cuantía equivalente dentro de diez años.

Transcurridos seis años, desde el comienzo de la operación, el acreedor tiene la posibilidad de colocar su dinero a un tipo de interés $i_a \neq i$ y el deudor puede adquirir dinero de otros acreedores a un tipo de interés i_d.

Estudiar si es posible llegar a un acuerdo de rescisión de la operación en los siguientes supuestos:

1.º $i_a = 0{,}11 > i$; $i_d = 0{,}09 < i$

2.º $i_a = 0{,}11 > i$; $i_d = 0{,}10 = i$

3.º $i_a = 0{,}09 < i$; $i_d = 0{,}105 > i$

4.º $i_a = 0{,}10 = i$; $i_d = 0{,}105 > i$

5.º $i_a = 0{,}12 > i$; $i_d = 0{,}11 > i$

6.º $i_a = 0{,}08 > i$; $i_d = 0{,}075 > i$

Con las condiciones fijadas en el origen, la cuantía de la contraprestación ascenderá a:

$$C_{10} = C_0\ (1 + i)^{10} = 1.750.000\ (1 + 0{,}10)^{10} = 4.539.049{,}38$$

y la reserva después de transcurridos seis años es:

$$C_6 = 1.750.000\ (1 + 0{,}10)^6 = 3.100.231{,}75$$

Si se pretende cancelar anticipadamente la operación, ésta habrá de ser de mutuo acuerdo, que sólo será posible cuando sea conveniente para ambos, es decir, si se produce un beneficio simultáneo para las dos partes.

El acreedor estará dispuesto a rescindir la operación a cambio de la cuantía C_a, si ésta, colocada al tipo de interés i_a verifica:

$$C_a\,(1+i_a)^4 > C_{10} = C_6\,(1+i)^4$$

El deudor demandará un préstamo de cuantía C_d, al tipo de interés i_d, si por él tiene que devolver la cuantía

$$C_d\,(1+i_d)^4 < C_{10} = C_6\,(1+i)^4$$

Por tanto, la rescisión será posible siempre que sea:

$$C_d\,(1+i_d)^4 < C_{10} = C_6\,(1+i)^4 < C_a\,(1+i_a)^4$$

es decir:

$$C_d < C_6 \left(\frac{1+i}{1+i_d}\right)^4 \;;\; C_a > C_6 \left(\frac{1+i}{1+i_a}\right)^4$$

y en consecuencia, la cuantía que como máximo está dispuesto a pagar el deudor, será superior a la que como mínimo aceptará el acreedor, por lo que se tiene que cumplir $C_d > C_a$ y el acuerdo para la cancelación anticipada es posible para cualquier valor R tal que:

$$C_a < R < C_d$$

Analicemos los distintos supuestos:

1.º $i_a = 0{,}11 > i = 0{,}10 \;;\; i_d = 0{,}09$

$$C_d < 3.100.231{,}75 \left(\frac{1+0{,}10}{1+0{,}09}\right)^4 = 3.215.576{,}98$$

$$C_a > 3.100.231{,}75 \left(\frac{1+0{,}10}{1+0{,}11}\right)^4 = 2.990.012{,}39$$

Es posible alcanzar acuerdo de cancelación para la cuantía R siendo:

$$2.990.012{,}39 < R < 3.215.576{,}98$$

2.º $i_a = 0{,}11 >\ ;\ i_d = 0{,}10 = i$

$$C_d < C_6 = 3.100.231{,}75$$

$$C_a > 2.990.012{,}39$$

$$2.990.012{,}39 < R < 3.100.231{,}75$$

3.º $i_a = 0{,}09 < i\ ;\ i_d = 0{,}105 > i$

$$C_d < 3.100.231{,}75 \left(\frac{1+0{,}10}{1+0{,}105}\right)^4 = 3.044.498{,}56$$

$$C_a > 3.100{,}231{,}75 \left(\frac{1+0{,}10}{1+0{,}09}\right)^4 = 3.215.576{,}98$$

No hay posibilidad de acuerdo.

4.º $i_a = 0{,}10 = i\ ;\ i_d = 0{,}105 > i$

$$C_d < 3.044.498{,}56$$

$$C_a > 3.100.231{,}75$$

No hay posibilidad de acuerdo.

5.º $i_a = 0{,}12 >\ ;\ i_d = 0{,}11 > i$

$$C_d < 2.990.012{,}39$$

$$C_a > 2.884.647{,}82$$

$$2.884.647{,}82 < R < 2.990.012{,}39$$

6.º $i_a = 0{,}08 < i\ ;\ i_d = 0{,}075 < i$

$$C_d < 3.398.842{,}63$$

$$C_a > 3.336.336{,}64$$

$$3.336.336{,}64 < R < 3.398.842{,}63$$

SECCION SEGUNDA

OPERACIONES DE CONSTITUCION

SUPUESTOS
DE
OPERACIONES DE CONSTITUCION

N. 1

Se pretende formar en cinco años un capital de un millón de ptas. mediante el ingreso en una entidad bancaria, al principio del año s (para $s = 1, 2, 3, 4, 5$) de la imposición de cuantía a_s tal que

$$a_1 = a_2 = a \quad ; \quad a_3 = a_4 = 1{,}5a \quad ; \quad a_5 = 2a.$$

Suponiendo que la entidad abona unos intereses a rédito i_s en el año s, con $i_1 = 0{,}08$, $i_2 = i_3 = 0{,}09$, $i_4 = 0{,}10$ e $i_5 = 0{,}105$, determinar:

1.º Cuantías de los términos constitutivos.

2.º Cuantías de las reservas.

3.º Cuotas de constitución.

4.º Cuotas de intereses.

La operación de constitución definida en el ejercicio es la siguiente:

$a_1 = a$	$a_2 = a$	$a_3 = 1{,}5a$	$a_4 = 1{,}5a$	$a_5 = 2a$	$C_5 = 1.000.000$
0	1	2	3	4	5
$i_1 = 0{,}08$	$i_2 = 0{,}09$	$i_3 = 0{,}09$	$i_4 = 0{,}10$	$i_5 = 0{,}105$	

1.º Para calcular las cuantías de los términos constitutivos se recurre a la ecuación de equivalencia

$$C_n = \sum_{r=1}^{n} a_r \prod_{h=r}^{n} (1 + i_h)$$

que en nuestro caso se concreta en:

$$C_5 = 1.000.000 = a_1\,(1+0{,}08)\,(1+0{,}09)^2\,(1+0{,}10)\,(1+0{,}105) +$$

$$+\, a_2\,(1+0{,}09)^2\,(1+0{,}10)\,(1+0{,}105) +$$

$$+\, a_3\,(1+0{,}09)\,(1+0{,}10)\,(1+0{,}105) + a_4\,(1+0{,}10)\,(1+0{,}105) +$$

$$+\, a_5\,(1+0{,}105) = 9{,}02439444\; a$$

de donde $\qquad a = 110.810{,}76$

y las cuantías de los términos constitutivos son:

$$a_1 = a_2 = 110.810{,}76 \quad ; \quad a_3 = a_4 = 166.216{,}14 \quad ; \quad a_5 = 221.621{,}52$$

2.º Para calcular la cuantía de la reserva al final del periodo s se aplica la relación de recurrencia:

$$C_s^- = (C_{s-1}^- + a_s)\,(1+i_s)$$

para $s = 1, 2, 3, 4, 5$. Los valores que se obtienen son:

$$\begin{aligned}
C_1^- &= a\,(1+0{,}08) &&= 119.675{,}62\\
C_2^- &= (C_1^- + a)\,(1+0{,}09) &&= 251.230{,}15\\
C_3^- &= (C_2^- + 1{,}5\,a)\,(1+0{,}09) &&= 455.016{,}46\\
C_4^- &= (C_3^- + 1{,}5\,a)\,(1+0{,}10) &&= 683.355{,}86\\
C_5^- &= (C_4^- + 2a)\,(1+0{,}105) &&= 1.000.000{,}00
\end{aligned}$$

3.º La cuota de constitución del periodo s es

$$\Delta_s^- = C_s^- - C_{s-1}^-$$

por lo que para $s = 1, 2, 3, 4$ y 5 resulta:

$$\Delta_1^- = C_1^- = 119.675{,}62 \quad ; \quad \Delta_2^- = C_2^- - C_1^- = 131.554{,}53$$

$$\Delta_3^- = C_3^- - C_2^- = 203.786{,}31 \quad ; \quad \Delta_4^- = C_4^- - C_3^- = 228.339{,}40$$

$$\Delta_5^- = C_5^- - C_4^- = 316.644{,}14$$

4.º Determinar las cuotas de intereses es inmediata, pues:

$$I_s^- = \Delta_s^- - a_s = (C_{s-1}^- + a_s)\, i_s$$

Sus valores son:

$$I_1^- = 8.864{,}86 \quad ; \quad I_2^- = 20.743{,}77 \quad ; \quad I_3^- = 37.570{,}17$$

$$I_4^- = 62.123{,}26 \quad ; \quad I_5^- = 95.022{,}62$$

N. 2

Para constituir en diez años un capital de dos millones de ptas. se ingresan, al principio de cada año, imposiciones de cuantía constante en una entidad bancaria que capitaliza el rédito anual constante $i = 0{,}095$. Obtener:

1.º Cuantía constante de la imposición anual.

2.º Saldo al final del año sexto.

3.º Cuantía del capital pendiente de constitución al final del octavo año.

4.º Cuota de constitución del cuarto año.

5.º Cuota de intereses del quinto año.

La operación, se caracteriza, por tener los términos constitutivos y los réditos anuales constantes y queda recogida en el siguiente esquema:

a		a		a		$\ldots a$		a				$C_{10} = 2 \cdot 10^6$
0	i	1	i	2	i	3	....	8	i	9	i	10

1.º De la ecuación de equivalencia

$$C_n = a\, \ddot{S}_{\overline{n}|i}$$

se sigue que la cuantía constante del término constitutivo anual es:

$$a = \frac{C_n}{\ddot{S}_{\overline{n}|i}} = \frac{2.000.000}{\ddot{S}_{\overline{10}|0{,}095}} = 117.381{,}10$$

2.º La reserva o saldo al final del año s es:

$$C_s^- = a\, \ddot{S}_{\overline{s}|i} = C_n \frac{\ddot{S}_{\overline{s}|i}}{\ddot{S}_{\overline{n}|i}}$$

Por tanto, al final del sexto año se tiene:

$$C_6^- = 117.381,10\ \ddot{S}_{\overline{6}|0,095} = 979.269,25$$

3.º La cuantía del capital pendiente de constitución al final del año s, se obtiene por la fórmula:

$$\mathscr{M}_s^- = C_n - C_s^- = C_n \left(1 - \frac{S_{\overline{s}|i}}{S_{\overline{n}|i}}\right)$$

por lo que para $s = 8$ resulta:

$$\mathscr{M}_8^- = 2.000.000 \left(1 - \frac{S_{\overline{8}|0,095}}{S_{\overline{10}|0,095}}\right) = 556.556,51$$

4.º Las cuotas de constitución para operaciones como la del presente ejercicio, satisfacen la relación:

$$\Delta_s^- = \Delta_{s-1}^- (1+i) \quad \text{con} \quad \Delta_1^- = a\,(1+i)$$

y, en consecuencia, se tiene:

$$\Delta_4^- = a\,(1+i)^4 = 117.381,10\,(1+0,095)^4 = 168.754,22$$

5.º De la expresión general

$$I_s^- = \Delta_s^- - a = a\left[(1+i)^s - 1\right]$$

se sigue:

$$I_5^- = 117.381,10\left[(1+0,095)^5 - 1\right] = 67.404,77$$

N. 3

Cierto ahorrador desea, en ocho años, formar un capital de 1.500.000 ptas. mediante imposiciones, al principio de cada año, en una entidad financiera que capitaliza a un tanto del 10 % anual. Si se pretende que las cuotas de constitución sean constantes, calcular:

1.º Cuantía de la cuota constante.

2.º Saldo al final del sexto año.

3.º Capital pendiente de constitución al final del cuarto año.

4.º Cuantías de los términos constitutivos.

5.º Cuotas de intereses.

La cuota constante es:

$$\Delta^- = \frac{C_n}{n} = \frac{1.500.000}{8} = 187.500$$

2.º Por ser $C_s^- = s\,\Delta^- = s\,\dfrac{C_n^-}{n}$ resulta:

$$C_6^- = 6\,\Delta^- = 1.125.000$$

3.º De la relación $\mathcal{M}_s^- = (n - s)\,\Delta^- = (n - s)\,\dfrac{C_n}{n}$ se sigue:

$$\mathcal{M}_4^- = (8 - 4)\ 187.500 = 750.000$$

4.º La cuantía del primer término constitutivo es:

$$a_1 = \frac{C_n}{n}\,(1 + i)^{-1} = 187.500\,(1 + 0{,}10)^{-1} = 170.454{,}55$$

Para calcular los demás, se aplica la relación

$$a_s = a_{s-1} - \frac{C_n\, i}{n}\,(1 + i)^{-1} = a_{s-1} - 17.045{,}45$$

y se obtiene:

$$a_2 = 153.409{,}10 \ ; \ a_3 = 136.363{,}65 \ ; \ a_4 = 119.318{,}20$$

$$a_5 = 102{,}272{,}75 \ ; \ a_6 = 85.227{,}30 \ ; \ a_7 = 68.181{,}85 \ ; \ a_8 = 51.136{,}4$$

5.° La aplicación de la fórmula

$$I_s^- = \Delta^- - a_s$$

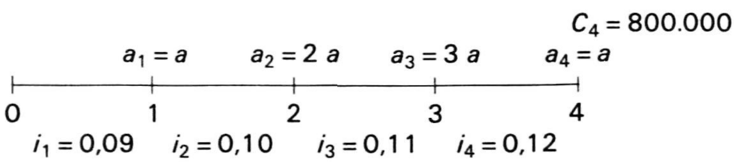
da los siguientes resultados:

$$I_1^- = 17.045{,}45 \ ; \ I_2^- = 34.090{,}90 \ ; \ I_3^- = 51.136{,}35 \ ; \ I_4^- = 68.181{,}80$$

$$I_5^- = 85.227{,}25 \ ; \ I_6^- = 102.272{,}70 \ ; \ I_7^- = 119.318{,}15 \ ; \ I_8^- = 136.363{,}60$$

N. 4

En la operación de constitución definida por la gráfica



determinar:

1.° Cuantías de los términos constitutivos pospagables.

2.° Reserva al principio del periodo *s*.

3.° Cuotas de constitución.

4.° Cuotas de intereses.

1.° La ecuación general de equivalencia financiera

$$C_n = \sum_{r=1}^{n-1} a_r \prod_{h=r+1}^{n} (1 + i_h) + a_n$$

adopta la forma:

$$C_4 = a_1\,(1+0{,}10)\,(1+0{,}11)\,(1+0{,}12) + a_2\,(1+0{,}11)\,(1+0{,}12) +$$

$$+ a_3\,(1+0{,}12) + a_4 = 8{,}21392\; a = 800.000$$

y se sigue que

$$a = 97.395{,}64$$

Por tanto:

$$a_1 = 97.395{,}64 \;;\; a_2 = 194.791{,}28 \;;\; a_3 = 292.186{,}92 \;;\; a_4 = 97.395{,}64$$

2.° Las reservas satisfacen la relación de recurrencia

$$C_s^+ = C_{s-1}^+\,(1+i_s) + a_s \quad \text{con} \quad C_0^+ = 0$$

y sus valores son:

$$\begin{aligned} C_1^+ &= a &&= 97.395{,}64 \\ C_2^+ &= C_1^+\,(1+0{,}10) + 2\,a &&= 301.926{,}48 \\ C_3^+ &= C_2^+\,(1+0{,}11) + 3\,a &&= 627.325{,}32 \\ C_4 &= C_3^+\,(1+0{,}12) + \;\; a &&= 800.000{,}00 \end{aligned}$$

3.° Las cuotas de constitución son:

$$\Delta_1^+ = C_1^+ = 97.395{,}64 \;;\; \Delta_2^+ = C_2^+ - C_1^+ = 204.530{,}84$$

$$\Delta_3^+ = C_3^+ - C_2^+ = 325.398{,}84 \;;\; \Delta_4^+ = C_4^+ - C_3^+ = 172.674{,}68$$

4.° Sustituyendo valores en

$$I_s^+ = \Delta_s^+ - a_s$$

resulta:

$$I_1^+ = 0 \;;\; I_2^+ = 9.739{,}56 \;;\; I_3^+ = 33.211{,}92 \;;\; I_4^+ = 75.279{,}04$$

N. 5

Se pretende constituir en nueve años un capital de tres millones de ptas. efectuando imposiciones constantes, al final de cada año, en una entidad bancaria que capitaliza a rédito anual constante del 11 %.

Calcular:

1.° Cuantía de la imposición anual.

2.° Capital constituido al principio del quinto año por los métodos prospectivo y retrospectivo.

3.° Capital pendiente de constitución al principio del tercer año.

4.° Cuota de constitución y cuota de intereses del séptimo año.

La operación descrita queda recogida así:

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & & C_9 = 3 \cdot 10^6 \\
 & a & a & a & a & a & a & a & a & a \\
\vdash & + & + & + & + & + & + & + & + & \dashv \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9
\end{array}
$$

y el cálculo de los distintos apartados es:

1.° De la ecuación general

$$C_n = a\, \mathbf{s}_{\overline{n}|i}$$

se sigue:

$$a = \frac{C_n}{\mathbf{s}_{\overline{n}|i}} = \frac{3.000.000}{\mathbf{s}_{\overline{9}|0,11}} = 211.804,99$$

2.° Para calcular la reserva, al principio del año $s + 1$, por el método prospectivo se utiliza la relación:

$$C_s^+ = C_n\,(1+i)^{-(n-s)} - a\, \mathbf{a}_{\overline{n-s}|i}$$

y por el método retrospectivo la ecuación

$$C_s^+ = a\, \mathbf{s}_{\overline{s}|i} = C_n \frac{\mathbf{s}_{\overline{s}|i}}{\mathbf{s}_{\overline{n}|i}}$$

Los resultados son:

a) método prospectivo

$$C_5^+ = 3.000.000\ (1 + 0{,}11)^{-5} - 211.804{,}99\ a_{\overline{5}|0,11} = 997.544{,}54$$

b) método retrospectivo

$$C_5^+ = 211.804{,}99\ s_{\overline{4}|0,11} = 997.544{,}54$$

3.º La aplicación de la expresión

$$\mathscr{M}_s^+ = C_n - C_s^+ = C_n \left(1 - \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}} \right)$$

conduce al resultado:

$$\mathscr{M}_2^+ = 3.000.000 \left(1 - \frac{s_{\overline{2}|0,11}}{s_{\overline{9}|0,11}} \right) = 2.553.091{,}46$$

4.º De la cadena de igualdades

$$\Delta_s^+ = \Delta_1^+\ (1 + i)^{s-1} = a\ (1 + i)^{s-1} = a + I_s^+$$

se deduce:

$$\Delta_7^+ = 211.804{,}99\ (1 + 0{,}11)^6 = 396.163{,}13$$

$$I_7^+ = \Delta_7^+ - a = 184.358{,}14$$

N. 6

Se quiere formar un capital de 1.400.000 ptas. mediante imposiciones anuales pospagables, durante siete años, en una entidad bancaria que abona un tipo de interés anual del 10 %. Si las cuotas de constitución son constantes, se pide:

1.º Cuantía de la cuota de constitución constante, del capital vivo al principio del tercer año, y del capital pendiente de constitución al principio del sexto año.

2.º Cuantías de los términos constitutivos.

1.º La aplicación de las fórmulas

$$\Delta^+ = \frac{C_n}{n} \quad ; \quad C_s^+ = s\,\Delta^+ \; ; \mathcal{M}_s^+ = (n-s)\,\Delta^+$$

proporciona los valores:

$$\Delta^+ = \frac{1.400.000}{7} = 200.000 \; ; \; C_2^+ = 400.000 \; ; \mathcal{M}_s^+ = 400.000$$

2.º De las relaciones

$$a_{s+1} = a_s - \Delta^+ i = a_s - 20.000 \; ; \; a_1 = \Delta^+$$

se sigue:

$$a_1 = 200.000 \; ; \; a_2 = 180.000 \; ; \; a_3 = 160.000 \; ; \; a_4 = 140.000$$

$$a_5 = 120.000 \; ; \; a_6 = 100.000 \; ; \; a_7 = 80.000$$

N. 7

Construir el cuadro de constitución de un capital de tres millones de ptas. si las características de la operación son:

- **Imposiciones al principio de cada año**
- **Duración de la operación diez años**
- **Rédito anual de valoración i_s que toma los siguientes valores:**

$$i_s = \begin{cases} 0{,}10 \text{ para } 1 \leqslant s \leqslant 5 \\ 0{,}11 \text{ para } 6 \leqslant s \leqslant 8 \\ 0{,}12 \text{ para } 9 \leqslant s \leqslant 10 \end{cases}$$

- **Cuotas de constitución de acuerdo con el siguiente plan:**

$$\Delta_s^- = \begin{cases} \Delta^- \text{ para } 1 \leqslant s \leqslant 3 \\ 1{,}5\Delta^- \text{ para } 4 \leqslant s \leqslant 7 \\ 2\Delta^- \text{ para } 8 \leqslant s \leqslant 10 \end{cases}$$

– La dinámica de toda operación de constitución, o de formación de capital, es usual recogerla en los cuadros de constitución. Estos informan en cualquier momento de la cantidad constituida, la que se satisface en concepto de término constitutivo, así como de los intereses y de las cuotas de constitución de cada periodo, y la cantidad pendiente de constitución.

Para calcular el cuadro de constitución se parte:

a) Del conocimiento de los términos constitutivos ó en su caso de los medios para determinarlos ó

b) Del conocimiento de las cuotas de amortización ó de la forma para calcularlas.

En el presente ejercicio se plantea el segundo caso.

De la condición $C_n = \sum_{s=1}^{n} \Delta_s^-$ se sigue:

$$3.000.000 = \sum_{s=1}^{10} \Delta_s^- = 15\,\Delta^-$$

y al ser $\Delta^- = 200.000$ el cálculo de las Δ_s^- es inmediato

Para determinar las restantes columnas basta aplicar las siguientes relaciones:

$$C_s^- = C_{s-1}^- + \Delta_s^- \ ; \ \mathscr{M}_s^- = C_n - C_s^- = \mathscr{M}_{s-1}^- - \Delta_s^-$$

$$a_s = \frac{\Delta_s^- - C_{s-1}^- \, i_s}{1 + i_s} \ ; \ I_s^- = \Delta_s^- - a_s$$

La estructura del cuadro de constitución y los valores de las magnitudes son:

Fin de periodo s	Réditos i_s	Términos constitutivos prepagables a_s	Cuotas de intereses I_s	Cuotas de constitución Δ_s^-	Capital total constituido C_s^-	Capital pendiente de constitución $\mathcal{M}_s^-$
Origen	—	—	—	—		3.000.000
1	0,10	181.818,18	18.181,82	200.000	200.000	2.800.000
2	0,10	163.636,36	36.363,64	200.000	400.000	2.600.000
3	0,10	145.454,55	54.545,45	200.000	600.000	2.400.000
4	0,10	218.181,82	81.818,18	300.000	900.000	2.100'000
5	0,10	190.909,09	109.090,91	300.000	1.200.000	1.800.000
6	0,11	151.351,35	148.648,65	300.000	1.500.000	1.500.000
7	0,11	121.621,62	178.378,38	300.000	1.800.000	1.200.000
8	0,11	181.981,98	218.018,02	400.000	2.200.000	800.000
9	0,12	121.428,57	278.571,43	400.000	2.600.000	400.000
10	0,12	78.571,43	321.428,57	400.000	3.000.000	00.000

N. 8

Construir el cuadro de constitución de un capital de 2.220.000 ptas. si:

– La duración de la operación es ocho años

– Los términos constitutivos que se imponen al principio de cada año son constantes

– El tanto anual de valoración es el 11 %

Por ser los términos constitutivos constantes su cuantía es:

$$a = \frac{C_n}{\ddot{S}_{\overline{n}|i}} = \frac{2.000.000}{\ddot{S}_{\overline{8}|0,11}} = 168.642,11$$

La obtención de las cuotas de amortización se efectúa aplicando la relación

$$\Delta_s^- = \Delta_{s-1}^- (1+i) = \Delta_{s-1}^- (1+0{,}11)$$

con $\Delta_1^- = a\,(1+i)$.

Para las restantes columnas se sigue el mismo método que en el ejercicio anterior.

El cuadro que se obtiene es:

s	a_s	I_s^-	Δ_s^-	C_s^-	$\mathcal{M}_s^-$
Origen	—	—	—	—	2.220.000,00
1	168.642,11	18.550,63	187.192,74	187.192,74	2.032.807,26
2	168.642,11	39.141,83	207.783,94	394.976,68	1.825.023,32
3	168.642,11	61.998,07	230.640,18	625.616,86	1.594.383,14
4	168.642,11	87.368,48	256.010,59	881.627,45	1.338.372,55
5	168.642,11	115.529,65	284.171,76	1.165.799,21	1.054.200,79
6	168.642,11	146.788,54	315.430,65	1.481.229,86	738.770,14
7	168.642,11	181.485,92	350.128,03	1.831.357,89	388.642,11
8	168.642,11	220.000,00	388.642,11	2.220.000,00	000.000,00

N. 9

Con los datos del ejercicio anterior, si las cuotas de constitución son constantes obtener el correspondiente cuadro de amortización.

El valor de la cuota de constitución constante es:

$$\Delta^- = \frac{C_n}{n} = \frac{2.220.000}{8} = 277.500$$

y en consecuencia, las cuantías de los capitales constituido y pendiente son:

$$C_s^- = s\,\Delta^- = 277.500\,s \qquad \mathscr{M}_s^- = 277.500\,(8-5)$$

Para calcular las restantes columnas se hace uso de las relaciones:

$$a_s = a_{s-1} - \Delta^- i\,(1+i)^{-1} \text{ con } a_1 = \Delta^-\,(1+i)^{-1}$$

$$I_s^- = I_{s-1}^- + \Delta^- i\,(1+i)^{-1} \text{ con } I_1^- = \Delta i\,(1+i)^{-1}$$

Los resultados se recogen en el siguiente cuadro:

s	A_s	I_s^-	Δ_s^-	C_s^-	$\mathscr{M}_s^-$
Origen	—	—	—	—	2.220.000
1	250.000	27.500	277.500	277.500	1.942.500
2	222.500	55.000	277.500	555.000	1.665.000
3	195.000	82.500	277.500	832.500	1.387.500
4	167.500	110.000	277.500	1.110.000	1.110.000
5	140.000	137.500	277.500	1.387.500	832.500
6	112.500	165.000	277.500	1.665.000	555.000
7	85.000	192.500	277.500	1.942.500	277.500
8	57.500	220.000	277.500	2.220.000	000.000

N. 10

Obtener el cuadro de constitución de una operación definida por las siguientes características:

– Cuantía del capital a constituir cinco millones de ptas.

– Duración de la operación ocho años

– Términos constitutivos anuales pospagables cuyas cuantías siguen el siguiente orden: $a_1 = a_2 = a_3 = a$; $a_4 = a_5 = a_6 = 2a$ y $a_7 = a_8 = 3a$.

– Los réditos anuales de la operación son: $i_1 = i_2 = i_3 = i_4 = 0{,}09$; $i_5 = i_6 = 0{,}10$ e $i_7 = i_8 = 0{,}105$.

La operación que se describe en el enunciado es la que se recoge en el siguiente esquema:

$$C_8 = 5 \cdot 10^6$$

	$a_1 = a$	$a_2 = a$	$a_3 = a$	$a_4 = 2a$	$a_5 = 2a$	$a_6 = 2a$	$a_7 = 3a$	$a_8 = 3a$
0	1	2	3	4	5	6	7	8

$$\underbrace{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}_{0{,}09} \quad \underbrace{4 \quad 5 \quad 6}_{0{,}10} \quad \underbrace{6 \quad 7 \quad 8}_{0{,}105}$$

y de la ecuación de equivalencia en el final

$$C_8 = 5.000.000 = \sum_{s=1}^{7} a_s \prod_{h=s+1}^{8} (1 + i_h) + a_8$$

al tenerse los valores siguientes:

s	i_s	a_s	$a_s \prod_{h=s+1}^{8} (1 + i_h)$
1	0,09	a	1,9133.2797 a
2	0,09	a	1,7553.4676 a
3	0,09	a	1,6104.0987 a
4	0,09	$2a$	2,9548.8050 a
5	0,10	$2a$	2,6862.5500 a
6	0,10	$2a$	2,4420.5000 a
7	0,105	$3a$	3,3150.0000 a
8	0,105	$3a$	3,0000.0000 a
			19,6772.7010 a

se sigue:

$$5.000.000 = 19{,}6772.7010\, a$$

por lo que es

$$a = 254.100{,}29$$

y, en consecuencia, quedan automáticamente calculados todos los términos constitutivos.

Para calcular las restantes variables se aplican las siguientes relaciones:

$$C_s^+ = C_{s-1}^+ (1 + i_s) + a_s \quad ; \quad \mathscr{M}_s^+ = C_n - C_s^+$$

$$I_s^+ = C_{s-1}^+\, i_s \quad ; \quad \Delta_s^+ = I_s^+ + a_s$$

Los resultados son los que se exponen a continuación:

Fin de periodo s	Réditos i_s	Términos constitutivos pospagables a_s	Cuotas de intereses I_s^+	Cuotas de constitución Δ_s^+	Capital total constituido C_s^+	Capital pendiente de constitución $\mathscr{M}_s^+$
Origen	—	—	—	—	—	5.000.000,00
1	0,09	254.100,29	00.000,00	254.100,29	254.100,29	4.745.899,71
2	0,09	254.100,29	22.869,02	276.969,31	531.069,60	4.468.930,40
3	0,09	254.100,29	47.796,26	301.896,55	832.966,15	4.167.033,85
4	0,09	508.200,58	74.966,95	583.167,53	1.416.133,68	3.583.866,32
5	0,10	508.200,58	141.613,37	649.813,95	2.065.947,63	2.934.052,37
6	0,10	508.200,58	206.594,76	714.795,34	2.780.742,97	2.219.257,03
7	0,105	762.300,87	291.978,00	1.054.278,87	3.835.021,84	1.164.978,16
8	0,105	762.300,87	402.677,29	1.164.978,16	5.000.000,00	000.000,00

N. 11

Constituir el cuadro de constitución de la operación definida en el ejercicio N. 10 para el caso particular de términos constitutivos constantes y rédito anual constante del 11 %.

La cuantía constante del término constitutivo es:

$$a = \frac{C_n}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{5.000.000}{s_{\overline{8}|0,11}} = 421.605,27$$

Para calcular las cuotas de amortización basta hacer uso de la relación:

$$\Delta_s^+ = \Delta_{s-1}^+ (1 + 0,11)$$

con $\Delta_1^+ = 421.605,27$.

Las fórmulas

$$I_s^+ = \Delta_s^+ - a \quad ; \quad C_s^+ = C_{s-1}^+ + \Delta_s^+ \quad ; \quad \mathscr{M}_s^+ = \mathscr{M}_{s-1}^+ - \Delta_s^+$$

proporcionan los valores de las restantes columnas.

Los resultados son:

s	a_s	I_s^+	Δ^+_s	C_s^+	$\mathscr{M}^+_s$
Origen	—	—	—	—	5.000.000,00
1	421.605,27	00.000,00	421.605,27	421.605,27	4.578.394,73
2	421.605,27	46.376,58	467.981,85	889.587,12	4.110.412,88
3	421.605,27	97.854,58	519.459,85	1.409.046,97	3.590.953,03
4	421.605,27	154.995,17	576.600,44	1.985.647,41	3.014.352,59
5	421.605,27	218.421,22	640.026,49	2.625.673,90	2.374.326,10
6	421.605,27	288.824,13	710.429,40	3.336.103,30	1.663.896,70
7	421.605,27	366.971,36	788.576,63	4.124.679,93	875.320,07
8	421.605,27	453.714,80	875.320,07	5.000.000,00	000.000,00

N. 12

Construir el cuadro de constitución de la operación definida en el ejercicio N. 10 para el caso particular de cuotas de constitución constantes y rédito anual constante del 12 %.

El valor de la cuota constante es:

$$\Delta^+ = \frac{C_n}{n} = \frac{5.000.000}{8} = 625.000$$

y proporciona de forma inmediata los valores

$$C_s^+ = s\,\Delta^+ \text{ y } \mathcal{M}_s^+ = (8-5)\,\Delta^+$$

Las restantes columnas se determinan aplicando las fórmulas:

$$a_s = a_{s-1} - \Delta^+ i \quad \text{con} \quad a_1 = \Delta^+$$

$$I_s = I_{s-1} + \Delta^+ i \quad \text{con} \quad I_1^+ = 0$$

El cuadro que se obtiene es el siguiente:

s	a_s	I_s^+	Δ_s^+	C_s^+	$\mathcal{M}_s^+$
Origen	—	—	—	—	5.000.000
1	625.000	00.000	625.000	625.000	4.375.000
2	550.000	75.000	625.000	1.250.000	3.750.000
3	475.000	150.000	625.000	1.875.000	3.125.000
4	400.000	225.000	625.000	2.500.000	2.500.000
5	325.000	300.000	625.000	3.125.000	1.875.000
6	250.000	375.000	625.000	3.750.000	1.250.000
7	175.000	450.000	625.000	4.375.000	625.000
8	100.000	525.000	625.000	5.000.000	000.000

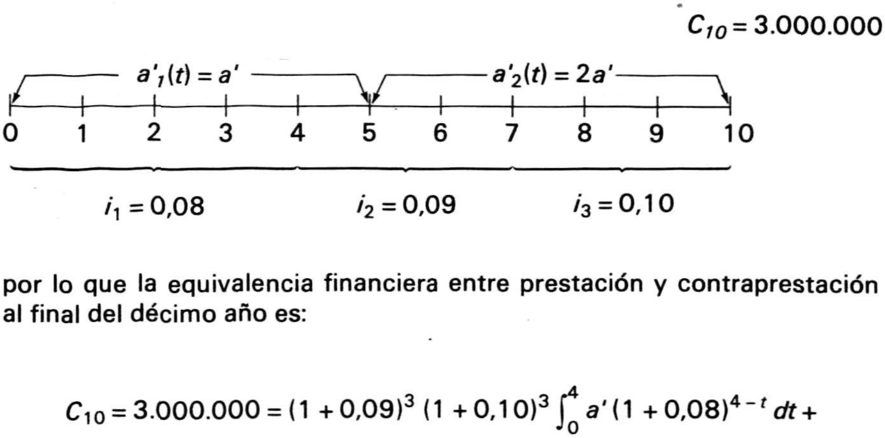
N. 13

Un ahorrador pretende, en diez años, formar un capital de tres millones de ptas. mediante imposiciones diarias. Si la entidad capitaliza a rédito anual del 8 % en los cuatro primeros años, del 9 % en los tres siguientes y del 10 % en los tres últimos y si por otra parte la densidad de los términos constitutivos es de cuantía constante durante los primeros cinco años y durante los cinco siguientes años también es constante, pero duplica a la anterior, determinar:

1.º Cuantía de la imposición diaria

2.º Capital constituido al final de los años quinto y octavo.

La operación queda recogida en el siguiente gráfico:



por lo que la equivalencia financiera entre prestación y contraprestación al final del décimo año es:

$$C_{10} = 3.000.000 = (1+0{,}09)^3\,(1+0{,}10)^3 \int_0^4 a'\,(1+0{,}08)^{4-t}\,dt +$$

$$+ (1+0{,}09)^2\,(1+0{,}10)^3 \int_4^5 a'\,(1+0{,}09)^{5-t}\,dt +$$

$$+ (1+0{,}10)^3 \int_5^7 2a'\,(1+0{,}09)^{7-t}\,dt + \int_7^{10} 2a'\,(1+0{,}09)^{10-t}\,dt =$$

$$= (1+0{,}09)^3\,(1+0{,}10)^3\,a'\,\bar{S}_{\overline{4}|0{,}08} + (1+0{,}09)^2\,(1+0{,}10)^3\,\bar{S}_{\overline{1}|0{,}09} +$$

$$+ (1+0{,}10)^3\,2a'\,\bar{S}_{\overline{2}|0{,}09} + 2a'\,\bar{S}_{\overline{3}|0{,}10} = 22{,}48139995\,a'$$

y en consecuencia:

$$a' = 133.443,65$$

Luego, la imposición diaria es:

a) Durante los cinco primeros años

$$\frac{a'}{365} = \frac{133.443,65}{365} = 365,60 \text{ ptas.}$$

b) Durante los siguientes cinco años

$$\frac{2a'}{365} = 731,20 \text{ ptas.}$$

El capital constituido al final del año quinto, calculado por el método retrospectivo, es:

$$C_5 = 133.443,65 \left[(1 + 0,09)\, \bar{s}_{\overline{4}|0,08} + \bar{s}_{\overline{1}|0,09} \right] = 820.673,45$$

La cuantía de la reserva al final del octavo año por el método prospectivo es:

$$C_8 = 3.000.000\,(1 + 0,10)^{-2} - 266.887,3\, \bar{a}_{\overline{2}|0,10} = 1.993.354,20$$

N. 14.

Para formar un capital de dos millones de ptas. se imponen durante cuatro años, en una entidad que capitaliza a un rédito anual del 12 %, las cuantías diarias constantes necesarias para conseguir dicho objetivo.

Determinar:

1.º Cantidad que diariamente se impone en la entidad.

2.º Si transcurridos dos años del comienzo de las imposiciones el tipo de interés anual aumentase hasta el 13 % y se pretendiese, al final del cuarto año, duplicar el objetivo inicial ¿cuál sería la nueva imposición diaria constante a depositar en los dos últimos años?

1.º Designando por X a la imposición diaria se verifica que

$$C_4 = 2.000.000 = \int_0^4 365\, X\, (1 + 0{,}12)^{4-t}\, dt =$$

$$= 365\, X\, \bar{S}_{\overline{4|}0,12} = 1.847{,}15\, X$$

de donde

$$X = 1.082{,}75$$

2.º La nueva imposición es la cuantía Y que satisface la ecuación

$$365\, X\, \bar{S}_{\overline{2|}0,12}\, (1 + 0{,}13)^2 + 365\, Y\, \bar{S}_{2|0,13} = 4.000.000$$

y su valor es:

$$Y = 3.467{,}17$$

N. 15

Obtener la imposición que diariamente se debe efectuar en una entidad financiera, que capitaliza a un tanto anual del 8 %, para formar en cuatro años un capital de 1.200.000 ptas. si la densidad de las cuotas de constitución es constante.

La densidad constante es:

$$C' = \frac{C_n}{n} = \frac{1.200.000}{4} = 300.000$$

y la reserva en un punto α:

$$C(\alpha) = C_n \frac{\alpha}{n} = 300.000\, \alpha.$$

De la relación

$$C' = \rho\, C(\alpha) + a'(\alpha)$$

con $\varrho = \lg_e (1 + i)$, se sigue:

$$a'(\alpha) = C' - \varrho\, C(\alpha) = 300.000 \quad \lg_e (1 + 0{,}08)\ 300.000\ \alpha =$$

$$= 300.000 - 23.088{,}31\ \alpha$$

siendo $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

Las imposiciones diarias se obtienen en la expresión

$$a'(\alpha)\ d\alpha = (300.000 - 23.088{,}31\ \alpha) \frac{1}{365}$$

al dar valores a α. Estos son:

$\alpha = 1$: Imposición diaria del primer año = 758,66 ptas.

$\alpha = 2$: Imposición diaria del segundo año = 695,41

$\alpha = 3$: Imposición diaria del tercer año = 632,15

$\alpha = 4$: Imposición diaria del cuarto año = 568,90

N. 16

Un ahorrador comenzó hace 5 años a realizar imposiciones mensuales pospagables de 10.000 ptas. en una entidad bancaria a un tipo de interés del 5 %. En estos momentos el tipo de interés es aumentado en un 0,5 %, si se continúa realizando imposiciones iguales ¿cuál será el montante que se conseguirá dentro de tres años?

El montante formado en estos momentos es:

$$M_0 = 10.000 \times 12\ S^{(12)}_{5|0{,}05} = 680.900{,}19$$

y dentro de tres años se habrá transformado en

$$M_1 = M_0\ (1 + 0{,}055)^3 = 799.541{,}17$$

Además, las imposiciones a realizar en los tres años permiten alcanzar el nivel

$$M_2 = 10.000 \times 12\ S^{(12)}_{3|0{,}055} = 391.396{,}05$$

por lo que se conseguirá el montante total

$$M = M_1 + M_2 = 1.072.296{,}24$$

N. 17

Se quiere formar un capital de 1.000.000 de ptas. en 10 años, realizando imposiciones constantes al principio de cada año en una entidad bancaria que abona intereses anuales del 7,5 %, construir el cuadro de constitución.

Siguiendo la metodología del ejercicio N. 8 y al ser

$$a = \frac{1.000.000}{\ddot{S}_{\overline{10}|0{,}075}} = 65.754{,}35 \;;\; \Delta_1^- = a(1 + 0{,}075) \;;\; \Delta_s^- = \Delta_{s-1}^- \,(1 + 0{,}075)$$

resulta el siguiente cuadro:

s	a_s	I_s	Δ_s^-	C_s^-	$\mathcal{M}_s^-$
Origen	—	—	—	—	1.000.000,00
1	65.754,35	4.931,58	70.685,93	70.685,93	929.314,07
2	65.754,35	10.233,02	75.987,37	146.673,30	853.326,70
3	65.754,35	15.932,07	81.686,42	228.359,72	771.640,28
4	65.754,35	22.058,56	87.812,91	316.172,63	683.827,37
5	65.754,35	28.644,53	94.398,88	410.571,51	589.428,49
6	65.754,35	35.335,35	101.478,79	512.050,30	487.949,70
7	65.754,35	43.335,35	109.089,70	621.140,00	378.860,00
8	65.754,35	51.516,08	117.271,43	738.411,43	261.588,57
9	65.754,35	60.312,43	126.066,78	864.478,21	135.521,79
10	65.754,35	69.767,44	135.521,79	1.000.000,00	000.000,00

N. 18

Con los datos del problema anterior construir el cuadro de constitución correspondiente si las cuotas de constitución son constantes:

Siguiendo la metodología del ejercicio N. 9 resulta:

s	a_s	I_s	Δ^-	C_s^-	$\mathscr{M}_s^-$
Origen	—	—	—	—	1.000.000
1	93.023,256	6.976,744	100.000	100.000	900.000
2	86.046,512	13.953,488	100.000	200.000	800.000
3	79.069,768	20.930,232	100.000	300.000	700.000
4	72.093,024	27.906,976	100.000	400.000	600.000
5	65.116,280	34.883,720	100.000	500.000	500.000
6	58.139,536	41.860,464	100.000	600.000	400.000
7	51.162,792	48.837,208	100.000	700.000	300.000
8	44.186,048	55.813,952	100.000	800.000	200.000
9	37.209,304	62.790,696	100.000	900.000	100.000
10	30.232,560	69.767,440	100.000	1.000.000	000.000

N. 19

Un equipo es adquirido en estos momentos en 1.000.000 de ptas. estimándose que su vida útil es de 10 años y su valor residual en 150.000 ptas. Para prevenir las renovaciones en su día se decide formar un fondo de reposición en una entidad bancaria, que abona unos intereses del 7 % anual, retirando de los resultados de cada año económico una cantidad constante que sea suficiente para renovar el equipo. Construir el cuadro de constitución.

Se trata de formar el capital de cuantía

$$1.000.000 - 150.000 = 850.000$$

mediante imposiciones constantes al final de cada periodo por lo que la cuantía del término constitutivo constante es:

$$a = \frac{850.000}{S_{\overline{10}|0,07}} = 61.520,88$$

El cuadro que se obtiene, siguiendo el mismo orden que en el ejercicio N. 11, es:

s	a	I_s^+	Δ_s^+	C_s^+	$\mathcal{M}_s^+$
Origen	—	—	—	—	850.000,00
1	61.520,88	0.000,00	61.520,88	61.520,88	788.479,12
2	61.520,88	4.306,46	65.827,34	127.348,22	722.651,78
3	61.520,88	8.914,37	70.435,25	197.783,47	652.216,53
4	61.520,88	13.844,84	75.365,72	273.149,19	576.850,81
5	61.520,88	19.120,44	80.641,32	353.790,51	496.209,49
6	61.520,88	25.765,33	86.286,21	440.076,72	409.923,28
7	61.520,88	30.805,37	92.326,25	532.402,97	317.597,03
8	61.520,88	37.268,11	98.789,09	631.192,06	218.807,94
9	61.520,88	44.183,44	105.704,32	736.896,38	113.103,62
10	61.520,88	51.582,74	113.103,62	850.000,00	000.000,00

N. 20

Se quiere constituir un capital de 1.000.000 ptas. en 10 años mediante aportaciones bianuales constantes en una entidad bancaria que capitaliza a rédito anual del 7 %, si la primera imposición tiene lugar en estos momentos, se pide:

***a*) Cuantía constante del término constitutivo.**

***b*) Situación de la operación al final del año 7.º**

***c*) Si se pretendiera constituir el mismo capital con imposiciones al final de cada año, si las cuotas de constitución fueran constantes indicar cuáles serían las cuantías de los términos constitutivos.**

a) Designando por X la cuantía del término constitutivo se verifica:

$$1.000.000 = X\left[(1+0{,}07)^{10} + (1+0{,}07)^{8} + \ldots\ldots + (1+0{,}07)^{2}\right] =$$

$$= X\,(1+0{,}07)^{2}\,\frac{s_{\overline{10}|0{,}07}}{s_{\overline{2}|0{,}07}}$$

y efectuando operaciones

$$X = 130.858{,}52$$

b) La reserva al final del séptimo año es:

$$C_{\bar{7}} = 130.858{,}52\left[(1+0{,}07)^{7} + (1+0{,}07)^{5} + (1+0{,}07)^{3} + (1+0{,}07)\right] =$$

$$= 693.940{,}66$$

c) La cuota de constitución constante asciende a

$$\Delta^{+} = \frac{1.000.000}{10} = 100.000$$

y teniendo en cuenta que

$$\Delta^{+} = a_1; \quad a_s = a_{s-1} - \Delta^{+} i = a_{s-1} - 7.000$$

resulta:

$$a_1 = 100.000;\ a_2 = 93.000;\ a_3 = 86.000;\ a_4 = 79.000;\ a_5 = 72.000$$

$$a_6 = 65.000;\ a_7 = 58.000;\ a_8 = 51.000;\ a_9 = 44.000;\ a_{10} = 37.000$$

N. 21

Calcular el tanto medio en los problemas siguientes: N. 1, N. 4 y N. 13.

1) Tanto medio en el problema N. 1.

Se trata de una operación de constitución con imposiciones prepagables cuya prestación y contraprestación son las descritas en el gráfico

$$\begin{array}{cccccc} a & a & 1{,}5a & 1{,}5a & 2a & C_5 = 1.000.000 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

con $a = 110.810{,}76$.

El tanto medio es el valor i_m que satisface la ecuación:

$$1.000.000 = \sum_{r=1}^{5} a_r (1 + i_m)^{5-(r-1)} =$$

$$= 110.810{,}76 \left[(1 + i_m)^5 + (1 + i_m)^4 + 1{,}5 \, (1 + i_m)^3 + 1{,}5 \, (1 + i_m)^2 + 2 \, (1 + i_m)\right]$$

y su cuantía es:

$$i_m = 0{,}097353 \quad \text{ó} \quad 9{,}7353 \, \%.$$

2) Tanto medio en el problema N. 4.

Su operación queda descrita por

$$\begin{array}{cccccc} & a & 2a & 3a & a & C_4 = 800.000 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

para $a = 97.395{,}64$.

El tanto medio i_m es el valor que se obtiene en la igualdad:

$$800.000 = \sum_{r=1}^{4} a_r (1 + i_m)^{4-r} =$$

$$= 97.395{,}64 \left[(1 + i_m)^3 + 2 \, (1 + i_m)^2 + 3 \, (1 + i_m) + 1\right]$$

y resulta:

$$i_m = 0{,}11467$$

3) Tanto medio en el problema N. 13

Es el valor i_m que soluciona la ecuación

$$C_{10} = \int_0^5 a'(1+i_m)^{10-t}\,dt + \int_5^{10} 2a'(1+i_m)^{5-t}\,dt =$$

$$= a'\,{}^5/\bar{S}_{\overline{5}|i_m} + 2a'\bar{S}_{\overline{5}|i_m}$$

es decir;

$${}^5/\bar{S}_{\overline{5}|i_m} + 2\,\bar{S}_{\overline{5}|i_m} = \frac{(1+i_m)^5-1}{\rho}\left[(1+i_m)^5+2\right] = \frac{3.000.000}{133.443,65} = 22,48139945$$

se obtiene:

$$i_m = 0,093667.$$

N. 22

Sea una operación de constitución con las siguientes características:

***a*) Contractuales**

– Cuantía del capital a constituir tres millones de ptas.

– Duración de la operación seis años.

– Tipo de interés anual concertado el 11 %.

– Términos constitutivos anuales, constantes y prepagables.

***b*) Comerciales.**

– Gastos iniciales a cargo del depositario de 40.000 ptas.

– Gastos de administración a cargo del depositario del 0,50 % sobre el saldo pendiente al final de cada año más una cantidad fija de 1.000 ptas. (se supone que se devengan al final de cada año).

– Gastos finales a cargo del depositario por un importe del 1 % sobre la cuantía total constituida y a cargo del depositante una cuantía análoga.

– Impuestos sobre los intereses, a cargo del depositante, a un tipo del 20 % y devengables a la percepción de la contraprestación.

Calcular:

1.° El tanto efectivo activo, del prestamista o del depositante.

2.° El tanto efectivo pasivo, del prestatario o del depositario.

Para calcular los tantos efectivos de toda operación de constitución es necesario obtener las prestaciones y contraprestaciones reales de las personas que intervienen en la operación: prestamista o depositante y prestatario o depositario. Las equivalencias reales proporcionan los valores de los tantos efectivos.

Además de calcular el término constitutivo constante es preciso obtener las cuantías de las reservas así como los gastos de administración. Las fórmulas:

$$a = \frac{3.000.000}{\ddot{s}_{\overline{6}|0,11}} \;\; ; \;\; C_s^- = (C_{s-1}^- + a)\,(1 + 0,11) \;\; ; \;\; g_s = 0,005\, C_s^- + 1.000$$

dan para $s = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6, los siguientes resultados:

Años s	Términos impositivos a	Reserva al final del año s C_s^-	Gastos de administración g_s
1	341.558,28	379.129,69	2.895,65
2	341.558,28	799.963,65	4.999,82
3	341.558,28	1.267.089,34	7.335,45
4	341.558,28	1.785.598,86	9.927,99
5	341.558,28	2.361.144,43	12.805,72
6	341.558,28	3.000.000,00	16.000,00

Las magnitudes reales son:

a) Prestación real del depositante o acreedor.

Una renta prepagable constante durante seis años y de cuantía $a =$ 341.558,28

b) Prestación real para el depositario o deudor.

La entrega por el acreedor menos los gastos de administración y los gastos iniciales.

a) Contraprestación real del depositario

Se compone de la contraprestación contractual de tres millones de ptas. más los gastos finales a su cargo, es decir:

$$3.000.000 + 3.000.000 \times 0{,}01 = 3.030.000$$

d) Contraprestación real para el depositante.

Es la cuantía que resulta de disminuir la contraprestación contractual en los gastos finales y los impuestos.

Los gastos finales son:

$$G_a^f = 3.000.000 \times 0{,}01 = 30.000$$

y los impuestos:

$$T_n = (C_n - na)\ \alpha = (3.000.000 - 6 \times 341.558{,}28) \times 0{,}20 = 190.130{,}06$$

por lo que la contraprestación real asciende a:

$$3.000.000 - 30.000 - 190.130{,}06 = 2.779.869{,}94$$

Las equivalencias financieras reales y los tantos efectivos que las verifican son:

1.º Del acreedor, activa, del prestamista o del depositante.

$$2.779.869{,}94 = 341.558{,}28\ \ddot{S}_{\overline{6}|i_a}$$

$$i_a = 0{,}087807$$

2.º Del deudor, pasiva, del prestatario o depositario.

$$3.030.000 = -\,40.000\,(1 + i_p)^6 + 341.558{,}28\ \ddot{S}_{\overline{6}|i_p} - \left[\sum_{s=1}^{5} g_s\,(1 + i_p)^{6-s} + g_6\right]$$

$$i_p = 0{,}126932.$$

N. 23

En la operación de constitución definida por la gráfica:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & & & & & C_{10} \\ a & a & a & a & a & & 2a & 2a & 2a & 2a & 2a \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array}$$

$$\underbrace{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}_{i_1 = 0{,}08}\quad \underbrace{5 \quad 6 \quad 7 \quad 8}_{i_2 = 0{,}10}\quad \underbrace{9 \quad 10}_{i_3 = 0{,}12}$$

con a = 100.000, si además intervienen las siguientes características comerciales:

a) Bilaterales: Bonificación al final de la operación del 2 % sobre C_{10} que hace que se abone un $V_{10} = 1{,}02\ C_{10}$.

b) Unilaterales:

– Gastos iniciales, a cargo del depositario, del 0,5 % sobre el capital total a constituir.

– Gastos finales, a cargo del depositario, del mismo importe que los iniciales.

– Gastos de administración, a cargo del depositario, del 0,25 % sobre los términos impositivos y devengables al vencimiento de dichos términos.

– Impuestos sobre los intereses y bonificación, al tipo del 15 % y a cargo del depositante, con devengo al final de la operación.

determinar:

1.º Capital constituido al final de la operación

2.º Tanto medio de la operación pura

3.º Tanto efectivo activo o del depositante

4.º Tanto efectivo pasivo o del depositario.

1.º Capital constituido al final de la operación

$$C_{10} = 100.000\, S_{\overline{5}|0,08}\,(1 + 0,10)^4\,(1 + 0,12)^2 +$$

$$+ 200.000\left[S_{\overline{3}|0,10}\,(1 + 0,12)^2 + S_{\overline{2}|0,12}\right] = 2.163.440,6$$

2.º Tanto medio de la operación pura.

Es el valor i_m tal que

$$2.163.440,6 = 100.000\ {}^{6}/S_{\overline{5}|i_m} + 200.000\, S_{\overline{5}|i_m}$$

y su solución es:

$$i_m = 0,086205$$

3.º Tanto efectivo activo o del depositante.

El depositante entrega los términos constitutivos del gráfico del enunciado y recibe el capital constituido C_{10} y la bonificación final después de deducidos los impuestos del 15 % sobre los intereses y bonificaciones.

El tanto efectivo i_a es el que se obtiene en la ecuación

$$100.000\ {}^{6}/S_{\overline{5}|i_a} + 200.000\, S_{\overline{5}|i_a} = 2.163.440,6 +$$

$$+ 0,02 \times 2.163.440,6 - (2.163.440,6 \times 1,02 - 1.500.000)\ 0,15 =$$

$$= 2.100.703$$

y resulta el valor

$$i_a = 0{,}079619$$

4.º Tanto efectivo pasivo o del depositario.

El depositario recibe netas unas imposiciones disminuidas en los gastos de administración y desembolsa en el origen gastos iniciales y al final de la operación el capital constituido, la bonificación final y los gastos finales. Luego representando por i_p al tanto efectivo resulta:

$$100.000\,(1 - 0{,}0025)\ {}^{6}/\ddot{s}_{\overline{5}|i_p} + 200.000\,(1 - 0{,}0025)\ \ddot{s}_{\overline{5}|i_p} =$$

$$= 0{,}005 \times 2.163.440{,}6\,(1 + i_p)^{10} + 2.163.440{,}6 + 0{,}02 \times 2.163.440{,}6 +$$

$$+ 0{,}005 \times 2.163.440{,}6 = 2.163.440{,}6\,\left[0{,}005\,(1 + i_p)^{10} + 1{,}025\right]$$

y se obtiene

$$i_p = 0{,}094906$$

N. 24

Para formar un capital de cuantía C_n, en n años, se imponen en una entidad bancaria al principio de cada semestre X pesetas durante los 5 primeros años y $2X$ al principio de cada año durante los n–s años restantes. Si la entidad bancaria capitaliza a rédito trimestral $i_1^{(4)}$ durante los s primeros años y a rédito semestral $i_2^{(2)}$ durante los n–s restantes, determinar:

1.º Cuantía X que hay que imponer.

2.º Reserva al final del año r, con $r < s$ y con $r > s$, por los métodos retrospectivos y prospectivo.

3.º Reserva al final del año m, con $m > s$, por el método recurrente en función del saldo al final del año r, con $r < s$.

4.º Si al final del año s se decidiese en lo sucesivo imponer, en sustitución de las cuantías anuales, las cuantías mensuales pospagables necesarias para doblar al final de los n años el objetivo inicial ¿cuál sería la cuantía mensual a imponer expresada en función de X?

El esquema de la operación es:

X	X	X	X	---- X	X	$2X$	$2X$	---- $2X$	C_n
0	$^1/_2$	1	$1 + {}^1/_2$	2 ---- $s-1$	$s-1 + {}^1/_2$	s	$s+1$	$s+2$ ---- $n-1$	n

$$\underbrace{0 \quad \cdots \quad s}_{i_1^{(4)}} \qquad \underbrace{s \quad \cdots \quad n}_{i_2^{(2)}}$$

y para homogeneizar los réditos a las amplitudes de los periodos de vencimiento de las imposiciones se procede a determinar el rédito semestral equivalente al trimestral $i_1^{(4)}$ y el anual equivalente al semestral $i_2^{(2)}$. Estos son:

$$i_1^{(2)} = (1 + i^{(4)})^2 - 1 \quad ; \; i_2 = (1 + {}_2^{(2)})^2 - 1.$$

1.º Cuantía X

De la equivalencia financiera al final de la operación

$$C_n = X\,\ddot{\mathbf{s}}_{\overline{2s}|i_1^{(2)}}\,(1 + i_2)^{n-s} + 2X\,\ddot{\mathbf{s}}_{\overline{n-s}|i_2}$$

se sigue:

$$X = \frac{C_n}{\mathbf{s}_{\overline{2s}|i_1^{(2)}}\,(1 + i_1^{(2)})\,(1 + i_2)^{n-s} + 2\,\mathbf{s}_{\overline{n-s}|i_2}\,(1 + i_2)}$$

2.º Reserva al final del año r

a) Para $r < s$

– método retrospectivo

$$C_r^- = X\,\ddot{\mathbf{s}}_{\overline{2r}|i_1^{(2)}}$$

– método prospectivo

$$C_r^- = C_n\,(1 + i_1^{(2)})^{-2(s-r)}\,(1 + i_2)^{-(n-s)} - X\,\ddot{\mathbf{a}}_{\overline{2(s-r)}|i_1^{(2)}} -$$

$$- 2X\,(1 + i_1^{(2)})^{-2(s-r)}\,\mathbf{a}_{\overline{n-s}|i_2}$$

b) Para $r > s$

– método retrospectivo

$$C_r^- = X\, \ddot{s}_{\overline{2s}|i_1^{(2)}} (1+i_2)^{r-s} + 2X\, \ddot{s}_{\overline{r-s}|i_2}$$

– método prospectivo

$$C_r^- = C_n (1+i_2)^{-(n-r)} - 2X\, \ddot{a}_{\overline{n-r}|i_2}$$

3.° Reserva al final del año m, con $m > s$, por el método recurrente en función de C_r^-, con $r < s$,

$$C_m^- = C_r^- (1+i_1^{(2)})^{2(s-r)} (1+i_2)^{m-s} +$$

$$+ X\, \ddot{s}_{\overline{2(s-r)}|i_1^{(2)}} (1+i_2)^{m-s} + 2X\, \ddot{s}_{\overline{m-s}|i_2}$$

4.° Para conseguir duplicar el capital C_n es necesario imponer, desde el año $s+1$, la cuantía mensual Y tal que:

$$2\, C_n = C_s^- (1+i_2)^{n-s} + 12Y\, s^{(12)}_{\overline{n-s}|i_2}$$

es decir

$$2X\, \ddot{s}_{\overline{2s}|i_1^{(2)}} (1+i_2)^{n-s} + 4X\, \ddot{s}_{\overline{n-s}|i_2} =$$

$$= X\, \ddot{s}_{\overline{2s}|i_1^{(2)}} (1+i_2)^{n-s} + 12Y\, s^{(12)}_{\overline{n-s}|i_2}$$

y efectuando operaciones:

$$Y = X \frac{1+i_2}{12 \dfrac{i_2}{j_2(12)}} \left[\frac{s_{\overline{2s}|i_1} (1+i_1)(1+i_2)^{n-s-1}}{s_{\overline{n-s}|i_2}} + 4 \right]$$

N. 25

Con las fórmulas obtenidas en el ejercicio anterior para $n = 10$, $C_{10} =$ $= 4.000.000$, $s = 4$, $i_1^{(4)} = 0{,}03$, e $i_2^{(2)} = 0{,}07$, obtener:

1.° Cuantía X

2.º Reserva por el método retrospectivo al final de los años segundo y séptimo.

3.º Reserva por el método recurrente al final del año sexto en función de la reserva del segundo año.

4.º Cuantía mensual pospagable que hay que imponer desde el quinto año para duplicar el objetivo inicial.

Aplicando directamente las fórmulas del N. 24 se tiene:

$$i_1^{(2)} = (1 + 0{,}03)^2 - 1 = 0{,}0609$$

$$i_2 = (1 + 0{,}07)^2 - 1 = 0{,}1449$$

$$X = \frac{4.000.000}{s_{\overline{8}|0{,}0609}\,(1 + 0{,}0609)\,(1 + 0{,}1449) + 2\,s_{\overline{6}|0{,}1449}\,(1 + 0{,}1449)} =$$

$$= 91.926{,}64$$

$$C_2^- = 91.926{,}64\,\ddot{s}_{\overline{4}|0{,}0609} = 427.204{,}38$$

$$C_7^- = 91.926{,}64\left[\ddot{s}_{\overline{8}|0{,}0609}\,(1 + 0{,}1449)^3 + 2\,\ddot{s}_{\overline{3}|0{,}1449}\right] = 2.005.185{,}82$$

$$C_6^- = C_2^-\,(1 + 0{,}0609)^4\,(1 + 0{,}1449)^2 + 91.926{,}64\left[\ddot{s}_{\overline{4}|0{,}0609}\,(1 + 0{,}1449)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\,\ddot{s}_{\overline{2}|0{,}1449}\right] = 1.720.828{,}68$$

$$Y = 91.926{,}64\,\frac{1 + 0{,}1449}{12\,\dfrac{0{,}1449}{0{,}136084}}\left(\frac{\ddot{s}_{\overline{8}|0{,}0609}\,(1 + 0{,}1449)^5}{s_{\overline{6}|0{,}1449}} + 4\right) =$$

$$= 52.690{,}09$$

SECCION TERCERA

OPERACIONES DE AMORTIZACION O DE PRESTAMO

SUPUESTOS DE OPERACIONES DE AMORTIZACION O DE PRESTAMO

N. 1

Se concede un préstamo con las siguientes características:

– Cuantía del capital prestado: 1.000.000 de pts.
– Duración de la operación: 5 años.
– Réditos anuales: $i_1 = 0{,}08$, $i_2 = 0{,}085$, $i_3 = 0{,}09$, $i_4 = 0{,}10$ e $i_5 = 0{,}11$
– Los términos amortizativos son: $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = 1{,}5a$, $a_4 = 2a$ y $a_5 = 3a$,

Determinar:

1.º Cuantías de los términos amortizativos.

2.º Cuantías de las reservas.

3.º Cuantías de las cuotas de amortización.

4.º Cuantías de las cuotas de interés.

5.º Cuantía del capital amortizado.

La operación de amortización del ejercicio queda recogida en el siguiente gráfico:

$C_0 = 1.000.000$	$a_1 = a$	$a_2 = a$	$a_3 = 1{,}5a$	$a_4 = 2a$	$a_5 = 3a$
0	1	2	3	4	5
	$i_1 = 0{,}08$	$i_2 = 0{,}085$	$i_3 = 0{,}09$	$i_4 = 0{,}10$	$i_5 = 0{,}11$

1.º El cálculo de las cuantías de los términos amortizativos requiere plantear la ecuación de equivalencia inicial

$$C_0 = \sum_{r=1}^{n} a_r \prod_{h=1}^{r} (1 + i_h)^{-1}$$

que en nuestro caso se concreta en:

$$1.000.000 = a\,(1+0{,}08)^{-1} + a\,(1+0{,}08)^{-1}\,(1+0{,}085)^{-1} +$$
$$+\,1{,}5a\,(1+0{,}08)^{-1}\,(1+0{,}085)^{-1}\,(1+0{,}09)^{-1} +$$
$$+\,2a\,(1+0{,}08)^{-1}\,(1+0{,}085)^{-1}\,(1+0{,}09)^{-1}\,(1+0{,}10)^{-1} +$$
$$+\,3a\,(1+0{,}08)^{-1}\,(1+0{,}085)^{-1}\,(1+0{,}09)^{-1}\,(1+0{,}10)^{-1}\,(1+0{,}11)^{-1} =$$
$$= 6{,}300848433\,a$$

de donde

$$a = 158.708{,}785 \text{ pts.}$$

y las cuantías de los términos amortizativos son:

$$a_1 = a_2 = 158.708{,}785 \;;\; a_3 = 238.063{,}177 \;;\; a_4 = 317.417{,}570 \;;$$
$$a_5 = 476.126{,}355$$

2.º Para calcular la cuantía de la reserva o saldo al principio del periodo $s+1$ se aplica la relación de recurrencia

$$C_s = C_{s-1}\,(1+i_s) - a_s$$

para $s = 1, 2, 3, 4, 5$. Los valores que se obtienen son:

$$\begin{aligned}
C_1 &= C_0\,(1+0{,}08) - a = 921.291{,}215\\
C_2 &= C_1\,(1+0{,}085) - a = 840.892{,}183\\
C_3 &= C_2\,(1+0{,}09) - 1{,}5a = 678.509{,}303\\
C_4 &= C_3\,(1+0{,}10) - 2a = 428.942{,}663\\
C_5 &= C_4\,(1+0{,}11) - 3a = 0
\end{aligned}$$

3.º La cuota de amortización del periodo s, con $s = 1, 2, 3, 4$ y 5, es:

$$A_s = C_{s-1} - C_s$$

por lo que resulta:

$$A_1 = C_0 - C_1 = 78.708{,}785 \;;\; A_2 = C_1 - C_2 = 80.399{,}032 \;;$$

$$A_3 = C_2 - C_3 = 162.382{,}880 \;;\; A_4 = C_3 - C_4 = 249.566{,}640 \;;$$

$$A_5 = C_4 - C_5 = 428.942{,}663$$

4.º Determinar las cuantías de las cuotas de interés es inmediato mediante la relación:

$$I_s = a_s - A_s = C_{s-1}\, i_s$$

Sus valores son:

$$I_1 = 80.000 \;;\; I_2 = 78.309{,}753 \;;\; I_3 = 75.680{,}297 \;;$$

$$I_4 = 67.850{,}93 \;;\; I_5 = 47.183{,}692$$

5.º El valor de la cuantía del capital amortizado al final del año se obtiene aplicando la relación:

$$\mathscr{M}_s = \mathscr{M}_{s-1} + A_s \quad \text{con } M_0 = 0$$

Los resultados son:

$$\mathscr{M}_1 = 78.708{,}785 \;;\; \mathscr{M}_2 = 159.107{,}817 \;;\; \mathscr{M}_3 = 321.490{,}697 \;;$$

$$\mathscr{M}_4 = 571.057{,}337 \;;\; \mathscr{M}_5 = 1.000.000$$

N. 2

Construir el cuadro de amortización de un préstamo otorgado con las condiciones:

- **Cuantía del capital prestado 2 millones de pts.**
- **Duración de la operación 8 años.**
- **Réditos anuales $i_1 = i_2 = i_3 = 0{,}09$, $i_4 = i_5 = 0{,}10$, $i_6 = i_7 = i_8 = 0{,}12$.**

en los supuestos:

1.º Los términos amortizativos son: $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a$, $a_5 = a_6 = 1{,}5a$, $a_7 = a_8 = 2a$.

2.º Las cuotas de amortización son: $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = A_4 = A_5 = 2A$, $A_6 = 1{,}5A$, $A_7 = 3A$ y $A_8 = 3{,}5A$.

Es usual recoger la dinámica de la operación de amortización o préstamo en un cuadro de amortización cuya lectura nos informe en cualquier momento de la cantidad adeudada, la que se satisface en concepto de término amortizativo, así como su descomposición en concepto de interés y en concepto de amortización del periodo, y la cantidad amortizada hasta el periodo considerado.

Para calcular el cuadro de amortización se parte:

a) Del conocimiento de los términos amortizativos o en su caso de los medios para determinarlos o

b) Del conocimiento de las cuotas de amortización o de la forma para calcularlas.

El presente ejercicio tiene por objeto obtener los cuadros de amortización por los dos caminos.

1.º De la ecuación de equivalencia en el origen

$$C_0 = 2.000.000 = \sum_{r=1}^{8} a_r \prod_{h=1}^{r} (1 + i_h)^{-1}$$

al ser:

s	i_s	a_s	$a \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h)^{-1}$
1	0,09	a	0,917431192 a
2	0,09	a	0,841679993 a
3	0,09	a	0,772183480 a
4	0,10	a	0,701984981 a
5	0,10	1,5a	0,957252247 a
6	0,12	1,5a	0,854689507 a
7	0,12	2a	1,017487508 a
8	0,12	2a	0,908470989 a
			6,971179897 a

se sigue:

$$2.000.000 = 6,971179897\ a$$

de donde

$$a = 286.895{,}48$$

En consecuencia quedan automáticamente calculados todos los términos amortizativos.

Para calcular las restantes variables se aplican las relaciones siguientes:

$$C_s = C_{s-1}\,(1 + i_s) - a_s$$
$$A_s = C_{s-1} - C_s$$
$$\mathscr{M}_s = C_0 - C_s = \mathscr{M}_{s-1} + A_s$$
$$I_s = a_s - A_s = C_{s-1}\,i_s$$

La estructura del cuadro de amortización y sus resultados se exponen a continuación.

Fin de periodo s	Réditos i_s	Términos amortizativos a_s	Cuotas de intereses I_s	Cuotas de amortización A_s	Capital total amortizado $\mathscr{M}_s$	Capital vivo o pendiente de amortización C_s
Origen	–	—	—	—	—	2.000.000,00
1	0,09	286.895,48	180.000,00	106.895,48	106.895,48	1.893.104,52
2	0,09	286.895,48	170.379,41	116.516,07	223.411,55	1.776.588,45
3	0,09	286.895,48	159.892,96	127.002,52	350.414,07	1.649.585,93
4	0,10	286.895,48	164.958,59	121.936,89	472.350,96	1.527.649,04
5	0,10	430.343,22	152.764,90	277.578,32	749.929,28	1.250.070,72
6	0,12	430.343,22	150.008,49	280.334,73	1.030.264,01	969.735,99
7	0,12	573.790,96	116.368,31	457.422,65	1.487.686,66	512.313,34
8	0,12	573.790,96	61.477,62	512.313,34	2.000.000,00	000.000,00

2.º Por ser la suma de las cuotas de amortización igual a la cuantía del capital prestado se sigue:

$$2.000.000 = \sum_{r=1}^{8} A_r = 16\,A$$

por lo que resulta

$$A = 125.000$$

y automáticamente se obtienen todas las cuotas de amortización.

Para calcular las restantes columnas se procede así:

$$C_s = C_{s-1} - A_s$$
$$\mathscr{M}_s = \mathscr{M}_{s-1} + A_s$$
$$I_s = C_{s-1}\, i_s$$
$$a_s = I_s + A_s$$

para $s = 1, 2, ..., 8$.

El cuadro de amortización que se obtiene es el siguiente:

Fin de periodo s	Réditos i_s	Términos amortizativos a_s	Cuotas de intereses I_s	Cuotas de amortización A_s	Capital total amortizado $\mathscr{M}_s$	Capital vivo C_s
Origen	—	—	—	—	—	2.000.000
1	0,09	305.000	180.000	125.000	125.000	1.875.000
2	0,09	293.750	168.750	125.000	250.000	1.750.000
3	0,09	407.500	157.500	250.000	500.000	1.500.000
4	0,10	400.000	150.000	250.000	750.000	1.250.000
5	0,10	375.000	125.000	250.000	1.000.000	1.000.000
6	0,12	307.500	120.000	187.500	1.187.500	812.500
7	0,12	472.500	97.500	375.000	1.562.500	437.500
8	0,12	490.000	52.500	437.500	2.000.000	000.000

N. 3

Construir el cuadro de amortización del préstamo del ejercicio anterior si se amortiza por el método americano.

Este método se caracteriza por ser

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_7 = 0 \;;\; A_8 = C_0 = 2.000.000$$

por lo que resulta:

$$C_s = C_0 \;;\; \mathcal{M}_s = 0 \;;\; a_s = C_0\, i_s \text{ para } s = 1, 2, \ldots, 7$$

$$C_8 = 0 \;;\; \mathcal{M}_8 = C_0 \;;\; a_8 = C_0\, i_8 + C_0.$$

El cuadro de amortización es:

Fin de periodo s	Réditos i_s	Términos amortizativos a_s	Cuotas de intereses I_s	Cuotas de amortización A_s	Capital total amortizado $\mathcal{M}_s$	Capital vivo C_s
Origen	—	—	—	—	—	2.000.000
1	0,09	180.000	180.000	—	—	2.000.000
2	0,09	180.000	180.000	—	—	2.000.000
3	0,09	180.000	180.000	—	—	2.000.000
4	0,10	200.000	200.000	—	—	2.000.000
5	0,10	200.000	200.000	—	—	2.000.000
6	0,12	240.000	240.000	—	—	2.000.000
7	0,12	240.000	240.000	—	—	2.000.000
8	0,12	2.240.000	240.000	2.000.000	2.000.000	000.000

N. 4

Si la operación del ejercicio n.º 1 fuese concebida como:
1.º Suma de operaciones simples simultáneas.
2.º Suma de amortizaciones sucesivas.
3.º Amortización por constitución del montante.
4.º Amortización con fondos de amortización.
5.º Amortización mixta.
6.º Suma de amortizaciones americanas.
obtener los resultados para cada una de esas interpretaciones.

Según la finalidad a que se destinen los términos amortizativos es posible admitir diversas concepciones en la operación de amortización. Todas ellas son equivalentes ya que en todo momento la reserva o saldo financiero es el mismo.

Al resolver las variables fundamentales de la operación planteada en el n.º 1 se ha obtenido:

Periodos	i_s	a_s	I_s	A_s	C_s
Origen	—	—	—	—	1.000.000.000
1	0,08	158.708,785	80.000,000	78.708,785	921.291,215
2	0,085	158.708,785	78.309,753	80.399,032	840.892,183
3	0,09	238.063,177	75.680,297	162.382,880	678.509,303
4	0,10	317.417,570	67.850,93	249.566,640	428.942,663
5	0,11	476.126,355	47.183,692	428.942,663	0
				1.000.000,000	

Analizaremos a continuación como los resultados son invariantes en cualquiera de las interpretaciones.

1.º Suma de operaciones simples simultáneas.

Consiste en suponer que en el origen se conciertan simultáneamente cinco operaciones elementales o simples en las que se intercambian los capitales:

$(C_{0,1}\ ;\ 0)$ por $(a_1 = 158.708{,}785\ ;\ 1)$ con $C_{0,1} = a_1\,(1 + i_1)^{-1} = 146.952{,}579$

$(C_{0,2}\ ;\ 0)$ por $(a_2 = 158.708{,}785\ ;\ 2)$ con $C_{0,2} = a_2 \prod_{h=1}^{2} (1 + i_h)^{-1} = 135.440{,}165$

$(C_{0,3}\ ;\ 0)$ por $(a_3 = 238.063{,}177\ ;\ 3)$ con $C_{0,3} = a_3 \prod_{h=1}^{3} (1 + i_h)^{-1} = 186.385{,}548$

$(C_{0,4}\ ;\ 0)$ por $(a_4 = 317.417{,}570\ ;\ 4)$ con $C_{0,4} = a_4 \prod_{h=1}^{4} (1 + i_h)^{-1} = 225.921{,}876$

$(C_{0,5}\ ;\ 0)$ por $(a_5 = 476.126{,}355\ ;\ 5)$ con $C_{0,5} = a_5 \prod_{h=1}^{5} (1 + i_h)^{-1} = \underline{305.299{,}832}$

$$\sum_{s=1}^{5} C_{0,s} = C_0 = 1.000.000{,}000$$

La reserva al principio de un periodo cualquiera del conjunto de las operaciones simples en vigor coincide con la de la operación general. En efecto:

$$C_{0,1} + C_{0,2} + C_{0,3} + C_{0,4} + C_{0,5} = 1.000.000{,}00 = C_0$$
$$(C_{0,2} + C_{0,3} + C_{0,4} + C_{0,5})\,(1 + 0{,}08) = 921.291{,}21 = C_1$$
$$(C_{0,3} + C_{0,4} + C_{0,5})\,(1 + 0{,}08)\,(1 + 0{,}085) = 840.892{,}18 = C_2$$
$$(C_{0,4} + C_{0,5})\,(1 + 0{,}08)\,(1 + 0{,}085)\,(1 + 0{,}09) = 678.509{,}30 = C_3$$
$$C_{0,5}\,(1 + 0{,}08)\,(1 + 0{,}085)\,(1 + 0{,}09)\,(1 + 0{,}10) = 428.942{,}66 = C_4$$

Por tanto, las cincos operaciones simples equivalen a la única del ejercicio N. 1.

2.º Suma de amortizaciones sucesivas.

En el intervalo [0 ; 1] se concierta una operación simple de prestación $C_0 = 1.000.000$ y como en 1 se abona $a_1 = 158.708{,}785$ que es suficiente para pagar los intereses $I_1 = 80.000$ y disminuir la deuda en $A_1 = 78.708{,}785$ quedando en 1 un saldo $C_1 = 921.291{,}215$.

Podemos suponer que en 1 se liquidó la deuda pagando 1.080.000 y se concertó una nueva operación simple hasta 2 por una cantidad $C_1 = 921.291{,}215$ para lo cual bastaba con pagar la diferencia $a_1 = 158.708{,}785$. Con el pago de $a_2 = 158.708{,}785$ se cubren los intereses $I_2 = 78.309{,}753$ y se disminuye la deuda en $A_2 = 80.399{,}032$ con lo que de nuevo se puede suponer una nueva operación hasta 3 de cuantía $C_2 = 840.892{,}183$ y así sucesivamente.

De esta manera hemos concebido la operación general como integrada por cinco operaciones simples concertadas sucesivamente.

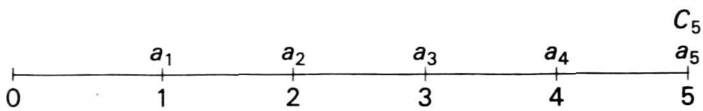
3.º Amortización por constitución del montante.

Consiste en suponer la operación descompuesta en dos:

a) El préstamo simple en el que se intercambian los capitales

$$(C_0 = 1.000.000\ ;\ 0) \text{ por } \left(C_5 = 1.000.000 \prod_{h=1}^{5} (1 + i_h) = 1.559.536{,}90\ ;\ 5\right)$$

b) La operación de prestación múltiple y contraprestación única que se recoge en el siguiente esquema:



con contraprestación (C_5 ; 5) y prestación los términos amortizativos del caso general.

En la primera operación el prestamista (prestatario) aparece como acreedor (deudor) por el importe

$$C'_s = C_0 \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h) = C'_{s-1} (1 + i_s)$$

y a su vez, es deudor (acreedor) en la segunda operación por

$$C''_s = \sum_{r=1}^{s-1} a_r \prod_{h=r+1}^{s} (1 + i_h) + a_s = C''_{s-1} (1 + i_s) + a_s$$

El capital vivo o reserva C_s en s es la diferencia $C'_s - C''_s$

Los valores de C'_s, C''_s y C_s son:

Años	i_s	C'_s	C''_s	C_s
Origen	—	1.000.000,00	0	1.000.000,00
1	0,08	1.080.000,00	158.708,79	921.291,21
2	0,085	1.171.800,00	330.907,82	840.892,18
3	0,09	1.277.262,00	598.752,70	678.509,30
4	0,10	1.404.988,20	976.045,54	428.942,66
5	0,11	1.559.536,90	1.559.536,90	0

y como puede comprobarse los saldos C_s coinciden con los de la operación general.

4.º Amortización con fondos.

Consiste en asignar a a_s una doble misión: por una parte abonar en el periodo s los intereses $C_0 i_s$ y por otra parte, con el resto $F_s = a_s - C_0 i_s$, llamado fondo de amortización, se constituye al final del intervalo [0, 5] el capital de cuantía $C_0 = 1.000.000$.

La descomposición de los términos es:

a_s =	$C_0 i_s$ +	F_s
158.708,79	80.000	78.708,79
158.708,79	85.000	73.708,79
238.063,18	90.000	148.063,18
317.417,57	100.000	217.417,57
476.126,35	110.000	366.126,35

Las F_s reconstruyen el capital de 1.000.000 de pts. ya que:

$$\sum_{s=1}^{4} F_s \prod_{h=s+1}^{5} (1 + i_h) + F_5 =$$

$$= 78.708{,}79\ (1 + 0{,}085)\ (1 + 0{,}09)\ (1 + 0{,}10)\ (1 + 0{,}11) +$$

$$+ 73.708{,}79\ (1 + 0{,}09)\ (1 + 0{,}10)\ (1 + 0{,}11) +$$

$$+ 148.063{,}18\ (1 + 0{,}10)\ (1 + 0{,}11) +$$

$$+ 217.417{,}57\ (1 + 0{,}11) + 366.126{,}35 = 1.000.000$$

Las reservas

$$C_s = 1.000.000 - \Big[\sum_{r=1}^{s-1} F_r \prod_{h=r+1}^{s} (1 + i_h) + F_s\Big]$$

coinciden con las de la operación inicial pues sus valores son:

$$C_1 = 921.291{,}21\ ;\ C_2 = 840.892{,}18\ ;\ C_3 = 678.509{,}30$$

$$C_4 = 428.942{,}66\ ;\ C_5 = 0$$

5.º Amortización mixta.

Consiste en descomponer los términos amortizativos en dos partes. Una D_s destinada a disminuir deuda y el resto $F_s = a_s - D_s$ a constituir el capital que iguale el importe de la deuda que dejan las D_s.

Supongamos que las D_s y como consecuencia los valores de F_s son:

s	D_s	$F_s = a_s - D_s$
1	100.000	58.708,79
2	100.000	58.708,79
3	100.000	138.063,18
4	120.000	197.417,57
5	120.000	356.126,35

El saldo que dejan pendientes las D_s.

$$C'_s = 1.000.000 \prod_{h=1}^{s} (1 + i_h) - \left[\sum_{r=1}^{s-1} D_r \prod_{h=r+1}^{s} (1 + i_h) + D_s \right]$$

el fondo que constituyen las F_s

$$C''_s = \sum_{r=1}^{s} F_r \prod_{h=r+1}^{s} (1 + i_h) + F_s$$

y la reserva neta

$$C_s = C'_s - C''_s$$

para cada uno de los periodos resultan:

s	C'_s	C''_s	C_s
1	980.000,00	58.708,79	921.291,21
2	963.300,00	122.407,82	840.892,18
3	949.997,00	271.487,70	678.509,30
4	924.996,70	496.054,04	428.942,66
5	906.746,34	906.746,34	0

6.º Suma de amortizaciones americanas

Por ser

$$a_s = C_{s-1}\, i_s + A_s = i_s \sum_{h=s}^{5} A_h + A_s$$

podemos concebir la operación de préstamo del capital (1.000.000 ; 0) como formada por la agrupación de cinco operaciones método americano de prestación (A_s ; 0) y término en t_s. La representación de las cinco operaciones es:

	0	1	2	3	4	5
$A_1 = 78.708{,}79$		6.296,70 + 78.708,79				
$A_2 = 80.399{,}03$		6.431,92	6.833,92 + 80.399,03			
$A_3 = 162.382{,}88$		12.990,63	13.802,54	14.614,46 + 162.382,88		
$A_4 = 249.566{,}64$		19.965,33	21.213,16	22.461,00	24.956,66 + 249.566,64	
$A_5 = 428.942{,}66$		34.315,42	36.460,13	38.604,84	42.894,27	47.183,69 + 428.942,66

0,08 0,085 0,09 0,10 0,11

La suma de las cinco operaciones es igual a la inicial ya que los pagos del conjunto de ellas son:

–En 1: 78.708,79 + 6.296,70 + 6.833,92 + 6.431,92 + 12.990,63 + 19.965,33 + 34.315,42 = 158.708,79

–En 2: 80.399,03 + 13.802,54 + 21.213,16 + 36.460,13 = 158.708,78

–En 3: 162.382,88 + 14.614,46 + 22.461 + 38.604,84 = 238.063,18

–En 4: 249.566,64 + 24.956,66 + 42.894,27 = 317.417,57

–En 5: 428.942,66 + 47.183,69 = 476.126,35

y además las reservas son:

$$A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 921.291{,}21 = C_1$$
$$A_3 + A_4 + A_5 = 840.892{,}18 = C_2$$
$$A_4 + A_5 = 678.509{,}30 = C_3$$
$$A_5 = 428.942{,}66 = C_4$$

N. 5

Una entidad bancaria concede un préstamo de 10 millones de pts. a cierta S. A. para ser amortizado en 15 años mediante anualidades constantes. Si el rédito anual concertado es el 10 %, determinar:

1.° Cuantía de la anualidad constante que amortiza el préstamo.

2.° Cuota de amortización del cuarto periodo.

3.° Cuota de intereses del octavo periodo.

4.° Capital amortizado en los diez primeros años.

5.° Capital vivo al principio del sexto año.

La operación de amortización del ejercicio se caracteriza por tener los términos amortizativos iguales y los réditos anuales constantes, es decir se trata de una operación método francés con periodo anual.

Representando por a al término amortizativo anual (anualidad) el esquema de la operación es:

C_0	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

con $C_0 = 10.000.000$.

1.° De la ecuación de equivalencia

$$C_0 = a\, \mathrm{a}_{\overline{n}|\,i}$$

se sigue que la cuantía de la anualidad constante es:

$$a = C_0\, \mathrm{a}^{-1}_{\overline{n}|\,i} = 10.000.000\, \mathrm{a}^{-1}_{\overline{15}|\,0,10} = 1.314.737,76 \text{ pts.}$$

2.° Las cuotas de amortización de este método verifican la relación

$$A_s = A_{s-1}\,(1+i) = A_1\,(1+i)^{s-1} \text{ con } A_1 = \frac{C_0}{\mathrm{s}_{\overline{n}|\,i}} = a - C_0 i$$

por lo que para calcular A_4 basta aplicar estas. Así:

$$A_4 = A_1\,(1+0{,}10)^3 = 10.000.000\,\frac{(1+0{,}10)^3}{s_{\overline{15}|0{,}10}} = 418.915{,}97$$

También se puede calcular la cuota A_4 teniendo en cuenta que:

$$A_4 = C_3 - C_4 = a\,a_{\overline{12}|0{,}10} - a\,a_{\overline{11}|0{,}10} =$$
$$= 1.314.737{,}76\,(1+0{,}10)^{-12} = 418.915{,}97$$

3.° La cuota de intereses del periodo s es:

$$I_s = a - A_s = C_{s-1}\,i$$

por lo que resulta:

$$I_6 = a - A_6 = a - A_4\,(1+i)^2 =$$
$$= 1.314.737{,}76 - 418.915{,}97\,(1+0{,}10)^2 = 807.849{,}44$$

Para calcular I_6 por el segundo camino se procede así:

$$I_6 = C_5 \times\ 0{,}10 = a\,a_{\overline{10}|0{,}10} \times 0{,}10 =$$
$$= 1.314.737{,}76\,a_{\overline{10}|0{,}10} \times 0{,}10 = 807.849{,}44$$

4.° La cuantía del capital amortizado, al final del periodo s, es:

$$\mathscr{M}_s = C_0 - C_s = C_0\,\left(1 - \frac{a_{\overline{n-s}|i}}{a_{\overline{n}|i}}\right) = C_0\frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}}$$

y, en consecuencia, se tiene:

$$\mathscr{M}_{10} = 10.000.000\,\frac{s_{\overline{10}|0{,}10}}{s_{\overline{15}|0{,}10}} = 5.016.109{,}46$$

5.° El capital vivo al principio del año $s+1$ se determina por la relación:

$$C_s = a\,a_{\overline{n-s}|i} = C_0\,\frac{a_{\overline{n-s}|i}}{a_{\overline{n}|i}}$$

por lo que en el ejercicio resulta:

$$C_5 = 10.000.000 \quad \frac{a_{\overline{10}|0,10}}{a_{\overline{15}|0,10}} = 8.078.494,45$$

N. 6

Se concede un préstamo de 2.000.000 de pts. para ser amortizado en 10 años a un tipo de interés del 9 % anual. Calcular el término amortizativo anual del préstamo bajo las hipótesis.

1.° Durante los tres primeros años solamente se pagan intereses y en los restantes la anualidad constante necesaria para extinguir la deuda.

2.° Durante los tres primeros años no se paga ninguna cantidad y en los restantes siete años la anualidad constante necesaria para amortizar la deuda.

1.° La operación de préstamo de esta hipótesis queda recogida en el siguiente esquema:

C_0	$I = C_0 i$	I	I	a	a	a	a	a	a	a
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

por lo que la ecuación de equivalencia es:

$$C_0 = I\, a_{\overline{3}|i} + a\ {}^{3/}a_{\overline{7}|i} = C_0 i\, \frac{1-(1+i)^{-3}}{i} + a\,(1+i)^{-3}\, a_{\overline{7}|i}$$

y operando se sigue:

$$C_0 = a\, a_{\overline{7}|i} \Rightarrow \quad a = C_0\, a^{-1}_{\overline{7}|i}$$

de donde

$$a = 2.000.000\ a^{-1}_{\overline{7}|0,09} = 397.381,03$$

así como

$$I = C_0 i = 2.000.000 \times 0,09 = 180.000$$

2.° En este supuesto se tiene:

C_0				a	a	a	a	a	a	a
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Por tanto,

$$C_0 = a\ {}^{3}/\, a_{\overline{7}|\, i} \Rightarrow a = C_0\ (1+i)^3\ a^{-1}_{\overline{7}|\, i}$$

luego

$$a = 2.000.000\ (1+0{,}09)^3\ a^{-1}_{\overline{7}|\, 0{,}09} = 514.619{,}96$$

N. 7

En un préstamo concertado en las condiciones siguientes:

– Cuantía del capital prestado 500.000 pts.
– Duración de la operación 5 años.
– Tipo de interés anual, el 11 %.

Si la amortización es con términos variables en progresión geométrica de razón $q = 1{,}08$, determinar:

1.° Cuantía de los términos amortizativos.

2.° Capital vivo al principio del tercer año.

3.° Cuota de amortización del tercer año.

1.° Los términos amortizativos siguen la ley

$$a_s = a_{s-1}\ q = a_1\ q^{s-1} = a_1\ 1{,}08^{s-1}$$

y la ecuación de equivalencia es en este método:

$$C_0 = A_{(a_1\,;\,q)\,\overline{n}|\, i} = a_1\ \frac{1-(1+i)^{-n}\ q^n}{1+i-q}$$

de la que se sigue:

$$a_1 = C_0\ \frac{1+i-q}{1-(1+i)^{-n}\ q^n} = 500.000\ \frac{1+0{,}11-1{,}08}{1-(1+0{,}11)^5\ 1{,}08^5} = 117.164{,}34$$

Los restantes términos amortizativos son:

$$a_2 = 126.537{,}49 \; ; \; a_3 = 136.660{,}49 \; ; \; a_4 = 147.593{,}33 \; ; \; a_5 = 159.400{,}80$$

2.º El capital vivo al principio del año $s + 1$, es:

$$C_s = A_{(a_{s+1}\,;\,q)\,\overline{n-s}|\,i} = a_{s+1} \; \frac{1 - (1+i)^{-(n-s)}\, q^{n-s}}{1+i-q}$$

por lo que la cuantía pedida asciende a:

$$C_2 = 136.660{,}49 \; \frac{1 - (1+0{,}11)^{-3}\; 1{,}08^3}{1 + 0{,}11 - 1{,}08} = 359.460{,}10$$

3.º De la relación

$$a_3 = I_3 + A_3 = C_2 i + A_3$$

resulta:

$$A_3 = 136.660{,}49 - 359.460{,}10 \times 0{,}11 = 97.119{,}88$$

N. 8

En el préstamo del ejercicio anterior cuáles serían los resultados de los puntos que se proponen si la amortización es con términos variables en progresión aritmética de razón $d = 10.000$.

De la ecuación de equivalencia

$$C_0 = A_{(a_1\,;\,d)\,\overline{n}|\,i} = \left(a_1 + \frac{d}{i} + dn\right) \; a_{\overline{n}|\,i} - \frac{dn}{i}$$

obtenemos:

$$a_1 = \left(C_0 + \frac{dn}{i}\right) a^{-1}_{\overline{n}|\,i} - \frac{d}{i} - dn = \left(500.000 + \frac{10.000 \times 5}{0{,}11}\right) a^{-1}_{\overline{5}|\,0{,}11} -$$

$$- \frac{10.000}{0{,}11} - 10.000 \times 5 = 117.362{,}57$$

y al ser $a_s = a_{s-1} + d = a_{s-1} + 10.000$ los restantes valores son:

$$a_2 = 127.362{,}57 \; ; \; a_3 = 137.362{,}57 \; ; \; a_4 = 147.362{,}57 \; ; \; a_5 = 157.362{,}57$$

El capital vivo al principio del tercer año es:

$$C_2 = A_{(a_3\,;\,d)\,\overline{3|}\,0,11} = \left(137.362,57 + \frac{10.000}{0,11} + 30.000\right) a_{\overline{3|}\,0,11} - \frac{30.000}{0,11} = 358.414,99$$

Las fórmulas

$$A_s = A_{s-1}\,(1+i) + d \;;\; A_1 = a_1 - C_0 i$$

aplicadas en el ejercicio dan los valores:

$$A_1 = 117.362,57 - 55.000 = 62.362,57$$

$$A_2 = A_1\,(1+0,11) + 10.000 = 79.222,45$$

$$A_3 = A_2\,(1+0,11) + 10.000 = 97.936,92$$

N. 9

Un préstamo de 800.000 pts. se otorga en las siguientes condiciones:

- **Tipo de interés anual el 12 %.**
- **Duración de la operación 10 años.**
- **Amortización con cuotas de amortización constantes**

Obtener:

1.º Cuantía del primer término amortizativo y ley de recurrencia de los mismos.

2.º Capital pendiente de amortización al principio del sexto año

3.º Capital amortizado al final del séptimo año.

4.º Cuota de intereses del quinto año.

1.º La cuantía del primer término amortizativo es:

$$a_1 = C_0 i + \frac{C_0}{n} = 800.000 \times 0,12 + \frac{800.000}{10} = 176.000$$

y la ley de recurrencia queda así:

$$a_s = a_{s-1} - \frac{C_0 i}{n} = a_{s-1} - 9.600$$

2.° $C_5 = (10 - 5)\,\dfrac{800.000}{10} = 400.000$

3.° $\mathscr{M}_7 = 7\,\dfrac{800.000}{10} = 560.000$

4.° $I_5 = I_1 - 4\,\dfrac{C_0 i}{10} = 96.000 - 4 \times 9.600 = 57.600$

N. 10

Se concede un préstamo con las siguientes condiciones:

– Capital nominal prestado 1.000.000 de pts.
– Duración de la operación 6 años.
– Abono de intereses anticipados en base a los réditos $i_1^* = i_2^* = 0{,}08$, $i_3^* = i_4^* = 0{,}10$, $i_5^* = 0{,}09$ e $i_6^* = 0{,}11$ siendo i_s^* el rédito correspondiente al año s.
– El término amortizativo que vence en el año s es: $a_1 = a_2 = a_3 = a$, $a_4 = 1{,}25\,a$, $a_5 = a_6 = 2a$

Determinar:

1.° Cuantías de los términos amortizativos.

2.° Reserva al principio del año s para $s = 2, 3, 4, 5$ y 6.

3.° Cuotas de amortización.

La operación descrita en el ejercicio es la siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
C_0^* & & & & & & \\
C_0^* i_1^* & a_1 = a & a_2 = a & a_3 = a & a_4 = 1{,}25a & a_5 = 2a & a_6 = 2a \\
\hline
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
i_1^* = 0{,}08 & i_2^* = 0{,}08 & i_3^* = 0{,}10 & i_4^* = 0{,}10 & i_5^* = 0{,}09 & i_6^* = 0{,}11 &
\end{array}$$

con $C_0^* = 1.000.000$.

1.º Para calcular los términos amortizativos se recurre a la ecuación de equivalencia financiera en el origen

$$C_0^* = C_0^* i_1 + \sum_{r=1}^{n} a_r \prod_{h=1}^{r} (1 - i_h^*) = \sum_{r=1}^{n} a_r \prod_{h=2}^{r} (1 - i_h^*)$$

que se concreta en el ejercicio en:

$$1.000.000 = a_1 + a_2 (1 - 0{,}08) + a_3 (1 - 0{,}08)(1 - 0{,}10) +$$
$$+ a_4 (1 - 0{,}08)(1 - 0{,}10)^2 + a_5 (1 - 0{,}08)(1 - 0{,}10)^2 (1 - 0{,}09) +$$
$$+ a_6 (1 - 0{,}08)(1 - 0{,}10)^2 (1 - 0{,}09)(1 - 0{,}11) = 6{,}24283896$$

de donde

$$a = 160.183{,}53$$

Por tanto, los términos amortizativos son:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a = 160.183{,}53$$
$$a_4 = 1{,}25\, a = 200.229{,}41$$
$$a_5 = a_6 = 2a = 320.367{,}06$$

2.º Haciendo uso de la relación de recurrencia

$$C_s^* = \frac{C_{s-1}^*}{1 - i_{s+1}^*} - \frac{a_s}{1 - i_{s+1}^*}$$

se tienen los siguientes valores:

$$C_1^* = 912.843{,}99 \ ; \ C_2^* = 836.289{,}40 \ ; \ C_3^* = 751.228{,}74$$
$$C_4^* = 605.493{,}77 \ ; \ C_5^* = 320.367{,}06$$

3.º La obtención de las cuotas de amortización es inmediata pues

$$A_s^* = C_{s-1}^* - C_s^*$$

y los resultados son:

$$A_1^* = 87.156{,}01 \ ; \ A_2^* = 76.554{,}59 \ ; \ A_3^* = 85.060{,}66$$
$$A_4^* = 145.734{,}97 \ ; \ A_5^* = 285.126{,}71 \ ; \ A_6^* = 320.367{,}06$$

N. 11

Se otorga un préstamo método alemán por un importe de 500.000 pts., para ser amortizado en 10 años.

Si el rédito anticipado anual de la operación es el 6 %, determinar:

1.º Anualidad que amortiza el préstamo.

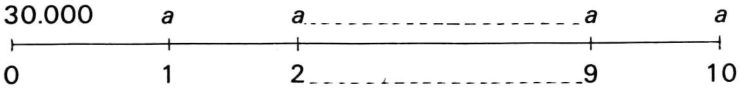
2.º Cuota de amortización del cuarto periodo.

3.º Capital amortizado al principio del octavo año.

4.º Capital vivo al principio del sexto año.

La operación queda recogida en el esquema:

$C_0^* = 500.000$
$C_0^* z = 30.000$



y se tiene:

1.º La ecuación de equivalencia financiera en el origen es:

$$C_0^* = a \frac{1 - (1 - z)^n}{z}$$

por lo que resulta:

$$a = C_0^* \frac{z}{1 - (1 - z)^n} = 500.000 \frac{0{,}06}{1 - (1 - 0{,}06)^{10}} = 65.021{,}63$$

2.º Por verificarse en general que

$$A_s^* = A_n^* (1 - z)^{n-s} = a\,(1 - z)^{n-s}$$

se tiene:

$$A_4^* = 65.021{,}63\,(1 - 0{,}06)^6 = 44.856{,}46$$

3.º El capital amortizado al principio del periodo $s + 1$ se obtiene mediante la expresión:

$$\mathscr{M}_s^* = C_0^* \left[1 - \frac{1 - (1 - z)^{n-s}}{1 - (1 - z)^n} \right]$$

por lo que resulta

$$\mathscr{M}_7^* = 500.000 \left[1 - \frac{1-(1-0{,}06)^3}{1-(1-0{,}06)^{10}}\right] = 316.404{,}91$$

4.° Por ser

$$C_s^* = C_0^* \frac{1-(1-z)^{n-s}}{1-(1-z)^n}$$

sustituyendo valores se obtiene:

$$C_5^* = 500.000 \frac{1-(1-0{,}06)^5}{1-(1-0{,}06)^{10}} = 288.366{,}61$$

N. 12

Si el préstamo del ejercicio anterior se amortizase con cuotas de amortización constantes ¿cuáles serían las anualidades que lo amortizarían?

Para obtener los valores de las anualidades basta hacer uso de las fórmulas

$$a_1 = I_2^* + \frac{C_0^*}{n} \quad ; \quad a_s = a_{s-1} - \frac{C_0^* z}{n}$$

con $I_2^* = I_1^* - \frac{C_0^* z}{n} = C_0^* z - \frac{C_0^* z}{n}$, y se tiene:

$$I_2^* = 500.000 \times 0{,}06 - \frac{500.000 \times 0{,}06}{10} = 30.000 - 3.000 = 27.000$$

$a_1 = 27.000 + 50.000 = 77.000$; $a_2 = 74.000$

$a_3 = 71.000$; $a_4 = 68.000$

$a_5 = 65.000$; $a_6 = 62.000$

$a_7 = 59.000$; $a_8 = 56.000$

$a_9 = 53.000$; $a_{10} = 50.000$

N. 13

Calcular las cuantías de los términos amortizativos que amortizan un préstamo de 400.000 pts. otorgado con las siguientes condiciones:

- **Duración de la operación 3 años.**
- **Pago de intereses trimestrales siendo el rédito trimestral del año s, $i_s^{(4)}$: para $s=1$ es $i_s^{(4)}=0{,}02$, para $s=2$ es $i_2^{(4)}=0{,}03$ y para $s=3$ es $i_3^{(4)}=0{,}025$.**
- **Las cuotas de amortización que vencen al final de cada año verifican: $A_2=2A_1$, $A_3=2A_2+A_1$.**

La amortización de un préstamo con fraccionamiento en el pago de los intereses se caracterizan por vencer éstos al final de cada subperiodo y las cuotas de amortización al final del periodo.

Por tratarse de periodos anuales y subperiodos trimestrales, para la duración de tres años, vencerán 12 términos amortizativos.

De la relación entre las cuotas se deduce:

$$400.000 = A_1 + A_2 + A_3 = 8A_1$$

luego,

$$A_1 = 50.000 \ ; \ A_2 = 100.000 \ ; \ A_3 = 250.000$$

Los capitales vivos al principio de cada año (y de cada uno de los trimestres de ese año) son:

$$C_0 = 400.000 \ ; \ C_1 = 350.000 \ ; \ C_2 = 250.000$$

y los términos amortizativos:

- Primer año

$$a_{1/4} = a_{2/4} = a_{3/4} = C_0\, i_1^{(4)} = 400.000 \times 0{,}02 = 8.000$$
$$a_1 = C_0\, i_1^{(4)} + A_1 = 8.000 + 50.000 = 58.000$$

- Segundo año

$$a_{1+1/4} = a_{1+2/4} = a_{1+3/4} = C_1\, i_2^{(4)} = 350.000 \times 0{,}03 = 10.500$$
$$a_2 = C_1\, i_2^{(4)} + A_2 = 10.500 + 100.000 = 110.500$$

– Tercer año

$$a_{2+1/4} = a_{2+2/4} = a_{2+3/4} = C_2\, i_3^{(4)} = 250.000 \times 0{,}025 = 6.250$$

$$a_3 = C_2\, i_3^{(4)} + A_3 = 6.250 + 250.000 = 256.250$$

N. 14

Se concede un préstamo de 500.000 pts. para ser amortizado en 10 años, con abono de intereses trimestrales a rédito trimestral constante del 3 %, y vencimiento de cuotas de amortización anuales progresivas. Se pide:

1.º Cuota de amortización del segundo año.
2.º Cuota de intereses del primer trimestre del quinto año.
3.º Cuantía total que se abona al final del noveno año.

Como todas las relaciones del método francés o progresivo se recuperan a través del tanto efectivo anual correspondiente al trimestral y dicho tanto efectivo es:

$$i = (1 + 0{,}03)^4 - 1 = 0{,}1255$$

resulta:

1.º $A_2 = A_1\,(1+i) = \dfrac{C_2}{s_{\overline{n}|i}}\,(1+i) = 500.000\,\dfrac{1+0{,}1255}{s_{\overline{10}|0{,}1255}} = 31.224{,}34$

2.º $i_5^{(4)} = C_4 \times 0{,}03 = 500.000 \times \left(1 - \dfrac{s_{\overline{4}|0{,}1255}}{s_{\overline{10}|0{,}1255}}\right) \times 0{,}03 = 10.990{,}08$

3.º $a_9 = C_8 \times 0{,}03 + A_9 = 75.994{,}36$

N. 15

Construir el cuadro de amortización de un préstamo que tiene las siguientes características:

- **Cuantía del capital prestado 5 millones.**
- **Duración de la operación 8 años.**
- **Tipo de interés anual 10 %.**
- **Amortización con anualidades constantes que atienden al pago de intereses y a la devolución del principal.**

Partiendo del conocimiento de $C_0 = 5.000.000$, $n = 8$ e $i = 0{,}10$ se determina la anualidad que es:

$$a = C_0\, a^{-1}_{\overline{n}|\,i} = 5.000.000\, a^{-1}_{\overline{8}|\,0,10} = 937.220{,}09$$

La cuota de intereses del primer periodo es:

$$I_1 = C_0\, i = 5.000.000 \times 0{,}10 = 500.000$$

y la cuota de amortización primera

$$A_1 = a - I_1 = 437.220{,}09$$

Para calcular las restantes cuotas de amortización se aplica la relación de recurrencia

$$A_s = A_{s-1}\,(1 + i)$$

Conocidas las A_s calcular las I_s, para $s = 2, 3, \ldots, 8$ es inmediato pues $I_s = a - A_s$.

Las columnas correspondientes al capital amortizado $\mathscr{M}_s$ y al capital vivo C_s se calculan como se ha indicado en el ejercicio N. 2.

El cuadro que resulta es:

Fin de periodo s	Anualidades a	Cuotas de intereses I_s	Cuotas de amortización A_s	Capital total amortizado $\mathscr{M}_s$	Capital vivo C_s
Origen	—	—	—	—	5.000.000,00
1	937.220,09	500.000,00	437.220,09	437.220,09	4.562.779,91
2	937.220,09	456.277,99	480.942,10	918.162,19	4.081.837,81
3	937.220,09	408.183,78	529.036,31	1.447.198,50	3.552.801,50
4	937.220,09	355.280,15	581.939,94	2.029.138,44	2.970.861,56
5	937.220,09	297.086,17	640.133,92	2.669.272,36	2.330.727,64
6	937.220,09	233.072,77	704.147,32	3.373.419,68	1.626.580,32
7	937.220,09	162.658,03	774.562,06	4.147.981,74	852.018,26
8	937.220,09	85.201,83	852.018,26	5.000.000,00	000.000,00

N. 16

Construir los cuadros de amortización correspondientes para el préstamo de 5.000.000 de ptas. y tipo de interés del 5 %, en los supuestos siguientes:

1.º Duración de la operación 5 años y amortización con anualidades constantes abonándose a los tres años de concertada la operación.

2.º Duración de la operación 5 años, abono de intereses en los dos primeros años y abono de anualidades constantes en los siguientes tres años.

3.º Duración de la operación 7 años y amortización mediante pagos constantes realizando el primero a los tres años de concertarse la operación.

4.º Duración de la operación 7 años, abono de intereses en los dos primeros años y abono de anualidades constantes en los siguientes cinco años.

1) Se trata de un préstamo francés con diferimiento de dos periodos en el vencimiento de los términos de la contraprestación.

Este cuadro presenta como característica el crecimiento del capital vivo en los dos primeros periodos, ya que al no realizarse contraprestación en ellos se han de acumular los intereses del préstamo.

La anualidad se determina a través de la ecuación:

$$5.000.000\ (1 + 0{,}05)^2 = 5.512.500 = a \cdot a_{\overline{3}|\,0{,}05}$$

y su valor es:

$$a = 2.024.237{,}20$$

La determinación del resto del cuadro es idéntico al del problema anterior.

Fin de periodo s	Anualidades a	Cuotas de intereses I_s	Cuotas de amortización A_s	Capital total amortizado $\mathcal{M}_s$	Capital vivo C_s
Origen	—	—	—	—	5.000.000,00
1	—	—	—	—	5.250.000,00
2	—	—	—	—	5.512.500,00
3	2.024.237,20	275:625,00	1.748.612,20	1.748.612,20	3.763.887,80
4	2.024.237,20	188.194,39	1.836.042,81	3.584.655,01	1.927.844,99
5	2.024.237,20	96.392,21	1.927.844,99	5.512.500,00	0.000.000,00

2) Al abonarse solamente los intereses en los dos primeros periodos la deuda pendiente al principio del tercer periodo coincide con la inicial. El resto del cuadro se determina como en el ejercicio anterior.

Los resultados son:

s	a	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen	—	—	—	—	5.000.000,00
1	—	250.000,00	—	—	5.000.000,00
2	—	250.000,00	—	—	5.000.000,00
3	1.836.042,80	250.000,00	1.586.042,80	1.586.042,80	3.413.957,20
4	1.836.042,80	170.697,86	1.665.344,94	3.251.387,74	1.748.612,26
5	1.836.042,80	87.430,54	1.748.612,26	5.000.000,00	0.000.000,00

3) Las características son semejantes a las del supuesto primero, si bien al efectuarse la amortización en cinco periodos en lugar de tres resulta:

$$a = 5.512.500\ a^{-1}_{\overline{5|}\,0,06} = 1.273.248,55$$

Las restantes columnas del cuadro se calculan como los casos anteriores.

s	a	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen	—	—	—	—	5.000.000,00
1	—	—	—	—	5.250.000,00
2	—	—	—	—	5.512.500,00
3	1.273.248,55	275.625,00	997.623,55	997.623,55	4.514.876,45
4	1.273.248,55	225.743,80	1.047.504,75	2.045.128,30	3.467.371,70
5	1.273.248,55	173.368,55	1.099.880,00	3.145.008,30	2.367.491,70
6	1.273.248,55	118.374,55	1.154.874,00	4.299.882,30	1.212.617,70
7	1.273.248,55	60.630,85	5.512.500,00	5.512.500,70	0.000.000,00

4) Las características de este cuadro de amortización son idénticas a las del apartado 2), pero con dos periodos más

s	a	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen	—	—	—	—	5.000.000
1	—	250.000	—	—	5.000.000
2	—	250.000	—	—	5.000.000
3	1.154.874	250.000	904.874,00	904.874,00	4.095.126
4	1.154.874	204.756,3	950.117,70	1.854.991,70	3.145.008,30
5	1.154.874	157.250,4	997.623,60	2.852.615,30	2.147.384,70
6	1.154.874	107.369,3	1.047.504,70	3.900.120,00	1.099.880,00
7	1.154.874	54.994,0	1.099.880,00	5.000.000,00	0.000.000,00

N. 17

Construir el cuadro de amortización de un préstamo de un millón de ptas., que se amortiza en 8 años abonándose un tipo de interés anual del 7 % si las cuantías de los términos amortizativos aumentan en progresión aritmética de razón 7.000 ptas.

Se determina el primer término amortizativo mediante la fórmula:

$$a_1 = \left(C_0 + \frac{dn}{i}\right) a^{-1}_{\overline{n}|i} - \frac{d}{i} - dn = \left(1.000.000 + \frac{56.000}{0,07}\right) a^{-1}_{\overline{8}|0,07} -$$

$$- \frac{7.000}{0,07} - 56.000 = 145.441,97$$

y los demás a_s por aplicación de la progresión

$$a_s = a_{s-1} + 7.000$$

Los intereses y la cuota de amortización del primer año son:

$$I_1 = 1.000.000 \times 0{,}07 = 70.000 \quad ; \quad A_1 = a_1 - I_1 = 75.441{,}97$$

Las restantes cuotas de amortización se obtienen a través de la fórmula de recurrencia

$$A_{s+1} = A_s\,(1 + 0{,}07) + 7.000$$

y las demás cuotas de intereses por la expresión

$$I_s = a_s - A_s$$

El cálculo de las restantes columnas es análoga a los anteriores ejercicios.

El cuadro que se obtiene es:

s	a_s	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen	—	—	—	—	1.000.000,00
1	145.441,97	70.000,00	75.441,97	75.441,97	924.558,03
2	152.441,97	64.719,05	87.722,92	163.164,89	836.835,11
3	159.441,97	58.578,45	100.863,52	264.028,41	735.971,59
4	166.441,97	51.518.01	114.923,96	378.952,37	621.047,63
5	173.441,97	43.473,33	129.968,64	508.921,01	491.078,99
6	180.441,97	34.375,53	146.066,44	654.987,45	345.012,55
7	187.441,97	24.150,88	163.291,09	818.278,54	181.721,56
8	194.441,97	12.720,51	181.721,46	1.000.000,00	000.000,00

N. 18

Construir el cuadro de amortización de un préstamo de 200.000 pts., si la duración de la operación es diez años, el tipo de interés anual concertado el 6 % y los términos amortizativos varían en progresión geométrica de razón $q = 0{,}90$.

La cuantía del primer término amortizativo es:

$$a_1 = C_0 \frac{1 + i + q}{1 - (1 + i)^{-n} q^n} = 200.000 \frac{1 + 0{,}06 - 0{,}90}{1 - (1 + 0{,}06)^{-10} \, 0{,}90^{10}} = 39.736{,}75$$

Los demás a_s se calculan por la relación $a_s = 0{,}90 \; a_{s-1}$

Los intereses y la cuota de amortización del primer año son:

$$I_1 = 200.000 \times 0{,}06 = 12.000 \quad ; \quad A_1 = a_1 - I_1 = 27.736{,}75$$

Las demás cuotas de amortización se calculan mediante la expresión:

$$A_{s+1} = A_s \, (1 + 0{,}06) + (a_{s+1} - a_s)$$

El resto de las columnas como los anteriores cuadros.

s	a_s	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen	—	—	—	—	200.000,000
1	39.736,754	12.000,000	27.736,754	27.736,754	172.265,246
2	35.763,079	10.335,785	25.427,284	53.164,038	146.835,962
3	32.186,771	9.810,158	23.376,613	76.540,651	123.459,349
4	28.968,094	7.407,561	21.560,533	98.101,184	101.898,816
5	26.071,284	6.113,929	19.957,355	118.058,539	81.941,461
6	23.464,156	4.916,486	18.547,670	136.606,209	63.393,791
7	21.117,740	3.803,627	17.314,113	153.920,322	46.079,678
8	19.005,966	2.764,780	16.241,186	170.161,508	29.838,492
9	17.105,370	1.790,308	15.315,062	185.476,570	14.523,430
10	15.394,833	871,403	14.523,430	200.000,000	00.000,000

N. 19

Construir el cuadro de amortización de un préstamo amortizable con cuotas de amortización constantes si la cuantía prestada es un millón de ptas., la duración de la operación 10 años y el rédito anual constante concertado el 7 %.

La cuota de amortización constante es:

$$A = \frac{C_0}{n} = \frac{1.000.000}{10} = 100.000$$

Las cuantías de la primera cuota de intereses y del primer término amortizativo son:

$$I_1 = 1.000.000 \times 0{,}07 = 70.000 \ ; \ a_1 = I_1 + A = 170.000$$

Para calcular las restantes I_s y a_s se aplican las relaciones:

$$a_s = a_{s-1} - \frac{C_0 i}{n} = a_{s-1} - 7.000 \ ; \ I_s = I_{s-1} - \frac{C_0 i}{n} = I_{s-1} - 7.000$$

Las restantes columnas se calculan con las fórmulas:

$$\mathcal{M}_s = s\frac{C_0}{n} = 100.000\, s \ ; \ C_s = (n-s)\frac{C_0}{n} = 100.000\,(10-s)$$

s	a_s	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen	—	—	—	—	1.000.000
1	170.000	70.000	100.000	100.000	900.000
2	163.000	63.000	100.000	200.000	800.000
3	156.000	56.000	100.000	300.000	700.000
4	149.000	49.000	100.000	400.000	600.000
5	142.000	42.000	100.000	500.000	500.000
6	135.000	35.000	100.000	600.000	400.000
7	128.000	28.000	100.000	700.000	300.000
8	121.000	21.000	100.000	800.000	200.000
9	114.000	14.000	100.000	900.000	100.000
10	107.000	7.000	100.000	1.000.000	000.000

N. 20

Construir el cuadro de amortización de un préstamo cuyas características son:

– Cuantía del capital nominal prestado 1.800.000 ptas.

– Duración de la operación ocho años.

– Abono de intereses prepagables o anticipados.

– Los réditos anuales concertados para los correspondientes años son: $i_1^* = i_2^* = 0{,}08$, $i_3^* = 0{,}09$, $i_4^* = i_5^* = i_6^* = 0{,}10$, $i_7^* = 0{,}105$ e $i_8^* = 0{,}11$.

– Las cuotas de amortización siguen la ley $A_s = s\,A$ para $s = 1, 2, ..., 8$.

Por verificar las cuotas de amortización que $C_0^* = \sum_{h=1}^{n} A_h^*$ se sigue:

$$1.800.000 = \sum_{s=1}^{8} s\,A = 36\ \mathrm{A}$$

luego

$$A = \frac{1.800.000}{36} = 50.000$$

y en consecuencia queda calculada la columna $A_s{}^*$.

Las columnas correspondientes a las cuantías de los capitales nominales amortizado y pendiente o vivo se determinan por las relaciones:

$$\mathcal{M}_s^* = \mathcal{M}_{s-1}^* + A_s^* = \sum_{h=1}^{n} A_h^* \quad ; \quad C_s^* = C_0^* - \mathcal{M}_s^* = C_{s-1}^* - A_s^*$$

Las restantes columnas se calculan con las fórmulas:

$$I_s^* = C_{s-1}^*\, i_s^* \quad ; \quad a_s = I_{s+1}^* + A_s^*$$

El cuadro de amortización a que se llega es:

Fin de periodo s	Réditos i_s^*	Términos amortizativos a_s	Cuotas de intereses I_{s+1}^*	Cuotas de amortización A_s^*	Capital total amortizado $\mathscr{M}_s^*$	Capital vivo C_s^*
Origen	—	144.000	144.000	—	—	1.800.000
1	0,08	190.000	140.000	50.000	50.000	1.750.000
2	0,08	248.500	148.500	100.000	150.000	1.650.000
3	0,09	300.000	150.000	150.000	300.000	1.500.000
4	0,10	330.000	130.000	200.000	500.000	1.300.000
5	0,10	355.000	105.000	250.000	750.000	1.050.000
6	0,10	378.750	78.750	300.000	1.050.000	750.000
7	0,105	394.000	44.000	350.000	1.400.000	400.000
8	0,11	400.000	—	400.000	1.800.000	000.000

N. 21

Construir el cuadro de amortización de un préstamo método alemán cuyas características financieras son:

- **Cuantía del capital nominal prestado 700.000 pts.**
- **Rédito constante anual anticipado concertado el 9 %.**
- **Duración de la operación 10 años.**

El método alemán se caracteriza por ser los términos amortizativos constantes. La cuantía de éstos es:

$$a = C_0^* \frac{z}{1-(1-z)^n} = 700.000 \frac{0,09}{1-(1-0,09)^{10}} = 103.179,93$$

Para calcular las cuotas de amortización basta aplicar las fórmulas:

$$A_n^* = a \ ; \ A_{s-1}^* = A_s^* \ (1 - z) = A_s^* \ (1 - 0{,}09)$$

Los intereses anticipados del primer periodo son

$$I_1^* = C_0^* \, z = 700.000 \times 0{,}09 = 63.000$$

y los de los restantes

$$I_{s+1}^* = a - A_s^*$$

Las restantes columnas se obtienen siguiendo el mismo proceso que en el supuesto N. 20.

El cuadro de amortización que resulta es:

Fin de periodo s	Términos amortizativos a_s	Cuotas de intereses I_{s+1}^*	Cuotas de amortización A_s^*	Capital total amortizado $\mathcal{M}_s^*$	Capital vivo C_s^*
Origen	63.000,00	63.000,00	—	—	700.000,00
1	103.179,93	59.026,16	44.153,77	44.153,77	655.846,23
2	103.179,93	54.659,31	48.520,62	92.674,39	607.325,61
3	103.179,93	49.860,57	53.319,36	145.993,75	554.006,25
4	103.179,93	44.587,22	58.592,71	204.586,46	495.413,54
5	103.179,93	38.792,34	64.387,59	268.974,05	431.025,95
6	103.179,93	32.424,34	70.755,59	339.729,64	360.270,36
7	103.179,93	25.426,53	77.753,40	417.483,04	282.516,96
8	103.179,93	17.736,63	85.443,30	502.926,34	197.073,66
9	103.179,93	9.286,20	93.893,73	596.820,07	103.179,93
10	103.179,93	—	103.179,93	700.000,00	000.000,00

N. 22

Construir el cuadro de amortización de un préstamo concertado bajo las siguientes condiciones:

- **Capital nominal prestado 250.000 ptas.**
- **Duración de la operación 8 años.**
- **Abono de intereses anticipados a rédito anual constante del 10 %.**
- **Amortización con cuotas de amortización anuales constantes.**

La cuota de amortización constante es:

$$A^* = \frac{C_0^*}{n} = \frac{250.000}{8} = 31.250$$

Las expresiones

$$\mathcal{M}_s^* = s\,\frac{C_0^*}{n} = 31.250\,s$$

$$C_s^* = (n-s)\,\frac{C_0^*}{n} = (8-5) \times 31.250$$

$$I_{s+1}^* = I_s^* - \frac{C_0^* z}{n} = I_s^* - 3.125 \text{ con} \qquad I_1^* = C_0^*\,z = 25.000$$

$$a_s = I_{s+1}^* + \frac{C_0^*}{n} = I_{s+1}^* + 31.250$$

dan los valores de las restantes columnas del cuadro. Estos son:

s	a_s	I_{s+1}^*	A_s^*	$\mathcal{M}_s^*$	C_s^*
Origen	25.000	25.000	—	—	250.000
1	53.125	21.875	31.250	31.250	218.750
2	50.000	18.750	31.250	62.500	187.500
3	46.875	15.625	31.250	93.750	156.250
4	43.750	12.500	31.250	125.000	125.000
5	40.625	9.375	31.250	156.250	93.750
6	37.500	6.250	31.250	187.500	62.500
7	34.375	3.125	31.250	218.750	31.250
8	31.250	—	31.250	250.000	00.000

N. 23

Construir el cuadro de amortización de un préstamo cuyas características financieras son:

– Capital prestado 300.000

– Duración de la operación 6 años.

– Abono de intereses semestrales a rédito variable de acuerdo con el siguiente plan: Dos primeros años $i_1^{(2)} = i_2^{(2)} = 0{,}04$, años tercero y cuarto $i_3^{(2)} = i_4^{(2)} = 0{,}045$, quinto año $i_5^{(2)} = 0{,}05$ y sexto año $i_6^{(2)} = 0{,}06$.

– Las cuotas de amortización de cada uno de los años son: $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = A_4 = 2A$ y $A_5 = A_6 = 3A$.

De la igualdad

$$300.000 = \sum_{r=1}^{6} A_r = 12\,A$$

se sigue

$$A = 25.000$$

siendo inmediatos los valores de las A_s.

Por vencer las cuotas de amortización al final del año se verifica:

$$\mathcal{M}_s = \sum_{r=1}^{s} A_r = \mathcal{M}_{s+1/2} \; ; \; C_s = C_0 - \mathcal{M}_s = C_{s+1/2}$$

Las cuotas de intereses y los términos amortizativos del año $s + 1$ son:

$$I_{s+1/2}^{(2)} = C_s\, i_s^{(2)} = I_{s+1}^{(2)}$$

$$a_{s+1/2} = I_{s+1/2}^{(2)} \; ; \; a_{s+1} = I_{s+1}^{(2)} + A_{s+1}$$

La aplicación de las relaciones genera el siguiente cuadro:

Fin de período s	Réditos $I_s^{(m)}$	Términos amortizativos a_s	Cuotas de intereses $I_s^{(m)}$	Cuotas de amortización A_s	Capital total amortizado $\mathcal{M}_s$	Capital vivo C_s
Origen	—	—	—	—	—	300.000
1/2	0,04	12.000	12.000	0	0	300.000
1	0,04	37.000	12.000	25.000	25.000	275.000
1 + 1/2	0,04	11.000	11.000	0	25.000	275.000
2	0,04	36.000	11.000	25.000	50.000	250.000
2 + 1/2	0,045	11.250	11.250	0	50.000	250.000
3	0,045	61.250	11.250	50.000	100.000	200.000
3 + 1/2	0,045	9.000	9.000	0	100.000	200.000
4	0,045	59.000	9.000	50.000	150.000	150.000
4 + 1/2	0,05	7.500	7.500	0	150.000	150.000
5	0,05	82.500	7.500	75.000	225.000	75.000
5 + 1/2	0,06	4.500	4.500	0	225.000	75.000
6	0,06	79.500	4.500	75.000	300.000	0

N. 24

Se concede un préstamo de un millón de ptas. para ser amortizado en cinco años por el método francés con abono de intereses semestrales a un rédito semestral constante del 5 % y amortización anual. Construir el cuadro de amortización.

Las cuotas de amortización que vencen al final de cada año varían en progresión geométrica de razón $1 + i$ siendo i el tanto efectivo anual correspondiente al rédito semestral del 5 %, es decir es:

$$i = (1 + 0{,}05)^2 - 1 = 0{,}1025$$

$$A_s = A_{s-1}\,(1 + 0{,}1025)$$

con

$$A_1 = \frac{C_0}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{1.000.000}{s_{\overline{5}|0{,}1025}} = 162.984{,}38$$

Una vez calculadas las cuotas de amortización se obtienen las restantes columnas del cuadro siguiendo el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior (N. 23).

Los resultados son:

s	a_s	$I_s^{(2)}$	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen	—	—	—	—	1.000.000,00
1/2	50.000,00	50.000,00	0	0	1.000.000,00
1	212.984,38	50.000,00	162.984,38	162.984,38	837.015,62
1 + 1/2	41.850,78	41.850,78	0	162.984,38	837.015,62
2	221.541,06	41.850,78	179.690,28	342.674,66	657.325,34
2 + 1/2	32.866,27	32.866,27	0	342.674,66	657.325,34
3	230.974,80	32.866,27	198.108,53	540.783,19	459.216,81
3 + 1/2	22.960,84	22.960,84	0	540.783,19	459.216,81
4	241.375,49	22.960,84	218.414,65	759.197,84	240.802,16
4 + 1/2	12.040,11	12.040,11	0	759.197,84	240.802,16
5	252.842,27	12.040,11	240.802,16	1.000,000,00	0

N. 25

Construir el cuadro de amortización de un préstamo de 300.000 ptas. concedido en las siguientes condiciones:

– Duración de la operación 10 años.
– Abono de intereses semestrales a rédito del 3,50 %.
– Amortización mediante cuotas anuales iguales abonándose la primera a los tres años de concertada la operación.

Siguiendo el método de los anteriores ejercicios se obtiene el cuadro de amortización que se expone:

s	a_s	$I_s^{(2)}$	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen	—	—	—	—	300.000
1/2	10.500	10.500	0	0	300.000
1	10.500	10.500	0	0	300.000
1 + 1/2	10.500	10.500	0	0	300.000
2	10.500	10.500	0	0	300.000
2 + 1/2	10.500	10.500	0	0	300.000
3	48.000	10.500	37.500	37.500	262.500
3 + 1/2	9.187,50	9.187,50	0	37.500	262.500
4	46.687,50	9.187,50	37.500	75.000	225.000
4 + 1/2	7.875	7.875	0	75.000	225.000
5	45.375	7.875	37.500	112.500	187.500
5 + 1/2	6.562,50	6.562,50	0	112.500	187.500
6	44.062,50	6.562,50	37.500	150.000	150.000
6 + 1/2	5.250	5.250	0	150.000	150.000
7	42.750	5.250	37.500	187.500	112.500
7 + 1/2	3.937,50	3.937,50	0	187.500	112.500
8	41.437,50	3.937,50	37.500	225.500	75.000
8 + 1/2	2.625	2.625	0	225.000	75.000
9	39.125	2.625	37.500	262,500	37.500
9 + 1/2	1.312,50	1.312,50	0	262.500	37.500
10	38.812,50	1.312,50	37.500	300.000	0

N. 26

Se presta un capital de 200.000 ptas. a un tipo de interés del 7 % anual para ser amortizado mediante anualidades constantes. Sabiendo que a los seis años el capital pendiente de amortización es la mitad que el prestado, determinar:

1.° Anualidad que amortiza el préstamo.

2.° Componentes del cuadro de amortización del tercer año.

1.° De la reserva por el método retrospectivo

$$C_6 = 200.000\,(1 + 0{,}07)^6 - a\,\mathbf{S}_{\overline{6}|0{,}07} = 100.000$$

se deduce el valor de la anualidad

$$a = \frac{200.000\ (1 + 0{,}07)^6 - 100.000}{s_{\overline{6|}\,0{,}07}} = 27.979{,}58$$

2.° Las cuantías de las componentes del tercer año del cuadro de amortización son:

$$a = 27.979{,}58$$

$$A_3 = A_1\ (1 + 0{,}07)^2 = 13.979{,}58\ (1 + 0{,}07)^2 = 16.005{,}22$$

$$I_3 = a - A_3 = 11.974{,}36$$

$$\mathcal{M}_3 = A_1 + A_2 + A_3 = 44.942{,}95$$

$$C_3 = 200.000 - \mathcal{M}_3 = 155.057{,}05$$

N. 27

Construir el cuadro de amortización de un préstamo con las siguientes características:

– Capital prestado 200.000 ptas.
– Tipo de interés anual el 6 %.
– Duración de la operación 10 años.
– Durante los cinco primeros años abono de una anualidad constante que permita amortizar la cuarta parte del principal y durante los cinco restantes abono de la anualidad que extinga la deuda.

La anualidad constante a_1 que se abona en cada uno de los cinco primeros años se obtiene en la ecuación de la reserva por el método retrospectivo al principio del sexto año que es,

$$C_5 = 200.000\ (1 + 0{,}06)^5 - a_1\ s_{\overline{5|}\,0{,}06} = 150.000$$

y efectuando operaciones

$$a_1 = \left[200.000\ (1 + 0{,}06)^5 - 150.000\right] \left[a^{-1}_{\overline{5|}\,0{,}06} - 0{,}06\right] = 20.869{,}82$$

La anualidad constante a_2 que se abona en cada uno de los cinco últimos años se calcula en la ecuación de la reserva, por el método prospectivo, al principio del sexto año, o sea:

$$150.000 = a_2\ a_{\overline{5|}\,0{,}06}$$

luego

$$a_2 = 150.000\, a^{-1}_{\overline{5}|0,06} = 35.609,46$$

Conocida a_1 se obtiene:

$$A_1 = a_1 - C_0\, i = 8.869,82 \ ; \ A_2 = 1,06\, A_1 = 9.402,01 \ ;$$
$$A_3 = 1,06\, A_2 = 9.966,13 \ ; \ A_4 = 1,06\, A_3 = 10.564,10 \ ;$$
$$A_5 = 1,06\, A_4 = 11.197,94$$

A partir de a_2 se sigue:

$$A_6 = 35.609,46 - 9.000 = 26.609,46 \ ; \ A_7 = 1,06\, A_6 = 28.206,03$$
$$A_8 = 1,06\, A_7 = 29.898,39 \ ; \ A_9 = 1,06\, A_8 = 31.692,29 \ ;$$
$$A_{10} = 1,06\, A_9 = 33.593,83$$

Las restantes columnas se calculan como en ejercicios anteriores y se obtiene el siguiente cuadro:

s	a_s	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
Origen	—	—	—	—	200.000,00
1	20.869,82	12.000,00	8.869,82	8.869,82	191.130,18
2	20.869,82	11.467,81	9.402,01	18.271,83	181.728,17
3	20.869,82	10.903,69	9.966,13	28.237,96	171.762,04
4	20.869,82	10.305,72	10.564,10	38.802,06	161.197,94
5	20.869,82	9.671,88	11.197,94	50.000,00	150.000,00
6	35.609,46	9.000,00	26.609,46	76.609,46	123.390,54
7	35.609,46	7.403,43	28.206,03	104.815,49	95.184,51
8	35.609,46	5.711,07	29.898,39	134.713,88	65.286,12
9	35.609,46	3.917,17	31.692,29	166.406,17	33.593,83
10	35.609,46	2.015,63	33.593,83	200.000,00	00.000,00

N. 28

Hace cuatro años fue concedido un préstamo francés, a un tipo de interés del 6 % anual, si en estos momentos (principio del quinto año) el capital pendiente de amortización es 804.392,60 ptas. y sabiendo que la cuota de amortización que hay que abonar al final del período ascenderá a 70.000 ptas. determinar:

1.º Cuantía del capital que se prestó.

2.º Duración de la operación.

El capital prestado C_0 verifica:

$$C_0 = \mathscr{M}_4 + C_4 = \mathscr{M}_4 + 804.392{,}60$$

por lo que basta determinar la cuantía del capital amortizado que es:

$$\mathscr{M}_4 = A_1\, s_{\overline{4}|0{,}06} = A_5\,(1+0{,}06)^{-4}\, s_{\overline{4}|0{,}06} =$$
$$= 70.000\, a_{\overline{4}|0{,}06} = 242.557{,}40$$

y resulta

$$C_0 = 1.046.950$$

Para determinar la duración de la operación haremos uso de la ecuación

$$\mathscr{M}_4 = C_0\, \frac{s_{\overline{4}|0{,}06}}{s_{\overline{n}|0{,}06}}$$

despejando $s_{\overline{n}|}$ y sustituyendo valores se tiene

$$s_{\overline{n}|0{,}06} = \frac{1.046.950}{242.557{,}40}\; s_{\overline{4}|0{,}06} = 18{,}88214$$

valor que corresponde a

$$n = 13 \text{ años}$$

N. 29

Sabiendo que la contraprestación pendiente de una operación de préstamo es la representada en el esquema

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 150.000 & 200.000 & 200.000 & 225.000 \\
s & s+1 & s+2 & s+3 & s+4=n
\end{array}
$$

$$i_{s+1}=0{,}08 \quad i_{s+2}=0{,}085 \quad i_{s+3}=0{,}09 \quad i_{s+4}=0{,}10$$

y que en el momento actual, principio del período $s+1$, los réditos de mercado son

$$i'_{s+1}=0{,}085 \;;\; i'_{s+2}=0{,}085 \;;\; i'_{s+3}=0{,}095 \;;\; i'_{s+4}=0{,}105$$

determinar:

1.º Cuantía de las reservas al principio de los períodos $s+1$, $s+2$, $s+3$ y $s+4$.

2.º Descomposición de los términos amortizativos en sus cuotas de intereses y sus cuotas de amortización.

3.º Valor del préstamo, valor del usufructo y valor de la nuda propiedad al principio del año $s+1$.

4.º Suponiendo que al principio de los años $s+2$, $s+3$ y $s+4$ el mercado continuase valorando con los mismos i_r' ¿cuáles serían los valores del préstamo en cada uno de esos principios de años?

1.º $C_s = 150.000\,(1+0{,}08)^{-1} +$
$+ 200.000\,(1+0{,}08)^{-1}\,(1+0{,}085)^{-1}\left[1+(1+0{,}09)^{-1}\right] +$
$+ 225.000\,(1+0{,}08)^{-1}\,(1+0{,}085)^{-1}\,(1+0{,}09)^{-1}\,(1+0{,}10) =$
$= 626.295{,}12$

$$C_{s+1} = C_s\,(1+0{,}08) - 150.000 = 526.398{,}73$$

$$C_{s+2} = C_{s+1}\,(1+0{,}085) - 200.000 = 371.142{,}62$$

$$C_{s+3} = C_{s+2}\,(1+0{,}09) - 200.000 = 204.545{,}46$$

$$C_{s+4} = C_{s+3}\,(1+0{,}10) - 225.000 = 0$$

2.º $A_{s+1} = C_s - C_{s+1} = 99.896{,}39$; $I_{s+1} = 150.000 - A_{s+1} =$
$= 50.103{,}61$

$A_{s+2} = C_{s+1} - C_{s+2} = 155.256{,}11$; $I_{s+2} = 200.000 - A_{s+2} =$
$= 44.743{,}89$

$A_{s+3} = C_{s+2} - C_{s+3} = 166.597{,}16$; $I_{s+3} = 200.000 - A_{s+3} =$
$= 33.402{,}84$

$A_{s+4} = C_{s+3} - C_{s+4} = 204.545{,}46$; $I_{s+4} = 225.000 - A_{s+4} =$
$= 20.454{,}54$

3.º Valor del préstamo:

$$\mathscr{V}_s = 150.000\,(1 + 0{,}085)^{-1} + 200.000\,(1 + 0{,}85)^{-2}\left[1 + (1 + 0{,}095)^{-1}\right] + \\ + 225.000\,(1 + 0{,}85)^{-2}\,(1 + 0{,}09)^{-1}\,(1 + 0{,}10)^{-1} = 621.969{,}38$$

Valor del usufructo:

$$\mathscr{U}_s = \sum_{r=s+1}^{s+4} I_r \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i'_h)^{-1} = 124.524{,}15$$

Valor de la nuda propiedad:

$$\mathscr{N}_s = \sum_{r=s+1}^{s+4} A_r \prod_{h=s+1}^{r} (1 + i'_h)^{-1} = 497.445{,}23$$

$$\mathscr{U}_s + \mathscr{N}_s = 124.524{,}15 + 497.445{,}23 = 621.969{,}38 = \mathscr{V}_s$$

4.º Valor del préstamo al principio de los años $s + 2$, $s + 3$ y $s + 4$.

$$\mathscr{V}_{s+1} = 200.000\,(1 + 0{,}85)^{-1}\,[1 + (1 + 0{,}095)^{-1}] + \\ + 225.000\,(1 + 0{,}085)^{-1}\,(1 + 0{,}095)^{-1}\,(1 + 0{,}10)^{-1} = 524.836{,}78$$

$$\mathscr{V}_{s+2} = 200.000\,(1 + 0{,}095)^{-1} + 225.000\,(1 + 0{,}095)^{-1}\,(1 + 0{,}105)^{-1} = \\ = 368.602{,}66$$

$$\mathscr{V}_{s+3} = 225.000\,(1 + 0{,}105)^{-1} = 203.619{,}91$$

N. 30

Se otorgó un préstamo de 2 millones de ptas. para ser amortizado en 12 años a un tipo de interés del 12 % anual. Si en estos momentos, principio del sexto año del préstamo, el tipo de interés del mercado es el 11 % determinar el valor del préstamo, el valor del usufructo y el valor de la nuda propiedad en las siguientes hipótesis:

1.º Método francés.

2.º Método americano.

3.º Términos variables en progresión aritmética de razón $d = 10.000$.

4.º Términos variables en progresión geométrica de razón $q = 1{,}08$.

5.º Amortización con cuota de amortización constante.

El préstamo del ejercicio se concierta con rédito periodal constante por lo que cualquiera que sea el método de amortización es aplicable el sistema lineal

$$\mathcal{V}_s = \mathcal{U}_s + \mathcal{N}_s$$
$$\mathcal{U}_s = \frac{i}{i'}(C_s - \mathcal{N}_s)$$

que relaciona cuatro valores $\mathcal{V}_s$, C_s, $\mathcal{U}_s$ y $\mathcal{N}_s$ y hace posible calcular dos de ellos en función de los otros dos que previamente se tienen que determinar.

1.º Método francés.

Los valores de C_s y $\mathcal{V}_s$ son:

$$C_s = a\, a_{\overline{7|}\,0{,}12} = 2.000.000 \frac{a_{\overline{7|}\,0{,}12}}{a_{\overline{12|}\,0{,}12}} = 1.473.516{,}57$$

$$\mathcal{V}_s = a\, a_{\overline{7|}\,0{,}11} = 2.000.000 \frac{a_{\overline{7|}\,0{,}11}}{a_{\overline{12|}\,0{,}12}} = 1.521.443{,}84$$

y el sistema que resulta es:

$$1.521.443{,}84 = \mathcal{U}_5 + \mathcal{N}_5$$

$$\mathcal{U}_5 = \frac{0{,}12}{0{,}11}(1.473.516{,}57 - \mathcal{N}_5)$$

con solución:

$$\mathscr{U}_5 = 575.128{,}09 \ ; \ \mathscr{N}_5 = 946.315{,}75$$

2.° Método americano.

En este caso, resulta más sencillo calcular directamente los valores de cada variable que son:

$$C_5 = 2.000.000$$

$$\mathscr{U}_5 = 240.000 \ a_{\overline{7}|\,0{,}11} = 1.130.927{,}10$$

$$\mathscr{N}_5 = 2.000.000 \ (1 + 0{,}11)^{-7} = 963.316{,}82$$

$$\mathscr{V}_5 = \mathscr{U}_5 + \mathscr{N}_5 = 2.094.243{,}92$$

3.° Términos variables en progresión aritmética.

Para calcular los valores de C_5 y $\mathscr{V}_5$ es necesario determinar previamente la cuantía del primer término amortizativo pendiente de vencimiento. Este es:

$$a_6 = a_1 + 5d = \quad 2.000.000 + \frac{120.000}{0{,}12} \qquad a^{-1}_{\overline{12}|\,0{,}12} -$$
$$- \ \frac{10.000}{0{,}12} - 120.000 + 50.000 = 330.977{,}09$$

Las cuantías del capital vivo y valor del préstamo son:

$$C_5 = A_{(a_6\,;\ 10.000)\ \overline{7}|\,0{,}12} = \left(330.977{,}09 + \frac{10.000}{0{,}12} + 70.000\right) \ a_{\overline{7}|\,0{,}12} -$$
$$- \ \frac{70.000}{0{,}12} = 1.626.941{,}53$$

$$\mathscr{V}_5 = A_{(a_6\,;\ 10.000)\ \overline{7}|\ 0{,}11} = \left(330.977{,}09 + \frac{10.000}{0{,}11} + 70.000\right) \ a_{\overline{7}|\,0{,}11} -$$
$$- \ \frac{70.000}{0{,}11} = 1.626.941{,}53$$

El sistema es:

$$1.681.500{,}58 = \mathscr{U}_5 + \mathscr{N}_5$$
$$\mathscr{U}_5 = \frac{0{,}12}{0{,}11} (1.626.941{,}53 - \mathscr{N}_5)$$

y tiene por solución:

$$\mathscr{U}_5 = 654.708{,}59 \qquad \mathscr{N}_5 = 1.026.791{,}99$$

4.º Términos variables en progresión geométrica.

Siguiendo análogo camino que en el epígrafe anterior resulta:

$$a_6 = a_1\, q^5 = 2.000.000 \frac{1 + 0{,}12 - 1{,}08}{1 - (1 + 0{,}12)^{-12}\, 1{,}08^{12}}\, 1{,}08^5 = 332.381{,}62$$

$$C_5 = A_{(a_6;\, 1{,}08)\,\overline{7}|\,0{,}12} = 332.381{,}62 \frac{1 - (1 + 0{,}12)^{-7}\, 1{,}08^7}{1 + 0{,}12 - 1{,}08} = 1.867.593{,}65$$

$$\mathscr{V}_5 = A_{(a_6;\, 1{,}08)\,\overline{7}|\,0{,}11} = 332.381{,}62 \frac{1 - (1 + 0{,}11)^{-7}\, 1{,}08^7}{1 + 0{,}11 - 1{,}08} = 1.933.598{,}25$$

y el sistema es:

$$1.933.598{,}\, 25 = \mathscr{U}_5 + \mathscr{N}_5$$

$$\mathscr{U}_5 = \frac{0{,}12}{0{,}11}\,(1.867.593{,}65 - \mathscr{N}_s)$$

del que se sigue:

$$\mathscr{U}_5 = 792.055{,}24\,;\, \mathscr{N}_5 = 1.141.543{,}01$$

5.º Amortización con cuota de amortización constante

En este caso se tiene:

$$C_5 = 7\,\frac{2.000.000}{12} = 1.166.666{,}67$$

$$\mathscr{N}_5 = \frac{2.000.000}{12}\, a_{\overline{7}|\,0{,}11} = 785.366{,}04$$

$$\mathscr{U}_5 = \frac{0{,}12}{0{,}11}\,(1.166.666{,}67 - 785.366{,}04) = 415.964{,}32$$

$$\mathscr{V}_5 = 415.964{,}32 + 785.366{,}04 = 1.201.330{,}36$$

N. 31

Un préstamo alemán fue concedido hace tres años con las siguientes características:

- **Capital nominal prestado 1.000.000 de ptas.**
- **Duración de la operación diez años.**
- **Rédito anticipado anual concertado el 6 %.**

Si, en estos momentos, el acreedor vende el préstamo a un tanto del 5 % determinar el valor del préstamo, valor del usufructo y valor de la nuda propiedad en los supuestos:

a) Los intereses del cuarto año no se han devengado.

b) Los intereses del cuarto año han sido devengados.

SUPUESTO a

La anualidad que amortiza el préstamo es:

$$a = C_0 \frac{z}{1-(1-z)^n} = 1.000.000 \frac{0{,}06}{1-(1-0{,}06)^{10}} = 130.043{,}28$$

El valor del préstamo al venderse es:

$$\mathscr{V}_3^* = C_3^* z + a(1-z') \frac{1-(1-z')^7}{z'} = a \frac{1-(1-z)^7}{z} z + a(1-z') \frac{1-(1-z')^7}{z'} =$$

$$= 130.043{,}28 \left[\frac{1-(1-0{,}6)^7}{0{,}06} 0{,}06 + (1-0{,}05) \frac{1-(1-0{,}05)^7}{0{,}05} \right] = 791.068$$

y el capital vivo:

$$C_3^* = a \frac{1-(1-z)^7}{z} = 130.043{,}28 \frac{1-(1-0{,}06)^7}{0{,}06} = 761.885{,}40$$

Sustituyendo en el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{V}_s^* &= \mathscr{U}_s^* + \mathscr{N}_s^* \\ \mathscr{U}_s^* &= \frac{z}{z'}(C_s^* - \mathscr{N}_s^*) \end{aligned}\right\}$$

para $s = 3$, los valores obtenidos resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 791.068 = \mathscr{U}_3^* + \mathscr{N}_3^* \\ \mathscr{U}_3^* = \dfrac{0,06}{0,05}(761.885,40 - \mathscr{N}_3^*) \end{array}\right\}$$

con solución

$$\mathscr{U}_3^* = 175.095,6 \;; \mathscr{N}_3^* = 615.972,4$$

SUPUESTO b

$$\mathscr{V}_3^{**} = \mathscr{V}_3^* - C_3^* z = 791.068 - 45.713,12 = 745.354,88$$

$$\mathscr{U}_3^{**} = \mathscr{U}_3^* - C_3^* z = 175.095,6 - 45.713,12 = 129.382,48$$

$$\mathscr{N}_3^{**} = \mathscr{N}_3^* = 615.972,4$$

N. 32

Hace seis años se concedió un préstamo de 3.000.000 de ptas., para ser amortizado en 10 años por el método francés con abono de intereses semestrales a rédito $i^{(2)} = 0,05$. En estos momentos, principio del séptimo año de la operación el mercado valora a un tanto efectivo anual del 12 %.

Determinar el valor del préstamo, el valor del usufructo y el valor de la nuda propiedad al principio del referido año séptimo.

Se trata de calcular los valores $\mathscr{V}_s^{(m)}, \mathscr{U}_s^{(m)}$ y $\mathscr{N}_s$ y al ser los réditos periodales constantes nos serviremos del sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} \mathscr{V}_s^{(m)} = \mathscr{U}_s^{(m)} + \mathscr{N}_s \\ \mathscr{U}_s^{(m)} = \dfrac{j_{(m)}}{j'_{(m)}}(C_s - \mathscr{N}_s) \end{array}\right\}$$

Calculamos previamente los valores del capital vivo y de la nuda propiedad mediante las fórmulas:

$$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} A_r = A_{s+1}\, \mathrm{S}_{\overline{n-s}|i} \;; \mathscr{N}_s = A_{(A_{s+1};\,1+i)\overline{n-s}|i'}$$

siendo $i = (1 + 0,05)^2 - 1 = 0,1025$ e $i' = 0,12$. Estos son:

$$C_6 = A_7\, s_{\overline{4}|0{,}1025} = 3.000.000\ \frac{(1+0{,}1025)^6}{s_{\overline{10}|0{,}1025}}\ s_{\overline{4}|0{,}1025} =$$
$$= 334.014{,}75 \times 4{,}65810185 = 1.555.874{,}74$$

$$\mathscr{N}_6 = A_{(A_7\,;\,1{,}1025)\overline{4}|0{,}12} = 334.014{,}75\ \frac{1-1{,}1025^4\,(1+0{,}12)^{-4}}{0{,}12-0{,}1025} = 1.165.241{,}10$$

Por ser

$$j_{(2)} = 2 \times 0{,}05 = 0{,}10\ ;\ j'_{(2)} = 2\left[(1+0{,}12)^{1/2} - 1\right] = 0{,}1166$$

resulta el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{V}_6^{(2)} &= \mathscr{U}_6^{(2)} + 1.165.241{,}10 \\ \mathscr{U}_6^{(2)} &= \frac{0{,}10}{0{,}1166}\ (1.555.874{,}74 - 1.165.241{,}10) \end{aligned}\right\}$$

con solución:

$$\mathscr{U}_6^{(2)} = 335{,}020{,}28\ ;\ \mathscr{V}_6^{(2)} = 1.500.261{,}38$$

N. 33

La venta de un préstamo francés, del que quedan siete años para su amortización ha producido unos ingresos de 727.105,18 ptas. De este préstamo se sabe que la cuota de intereses del año en curso hubiese ascendido a 50.000 ptas., que la cuota de amortización del año anterior fue de 75.000 ptas. y que el tanto de concesión del préstamo es un uno por ciento superior al de venta

Determinar:

1.º El tanto de concesión del préstamo y el tanto de venta.

2.º La anualidad que lo amortiza.

3.º El capital vivo en el momento de la venta.

1) La estructura de la anualidad del año en curso es

$$a = I_{n-7} + A_{n-7} = 50.000 + 75.000\,(1+i)$$

y la ecuación del valor del préstamo

$$\mathscr{V}_{n-7} = a\ \mathrm{a}_{\overline{7}|i'} \quad \text{con} \quad i' = i - 0{,}01$$

Sustituyendo valores se tiene:

$$727.105{,}18 = \left[50.000 + 75.000\ (1 + i' + 0{,}01)\right]\ \mathrm{a}_{\overline{7}|i'}$$

con solución

$$i' = 0{,}06$$

por lo que

$$i = 0{,}06 + 0{,}01 = 0{,}07$$

2) La anualidad constante resulta:

$$a = 50.000 + 75.000\ (1 + 0{,}07) = 130.250$$

3) El capital vivo asciende a:

$$C_{n-7} = 130.250\ \mathrm{a}_{\overline{7}|0{,}07} = 701.954{,}94$$

Al mismo resultado se puede llegar a través de la relación entre el capital vivo y el valor del préstamo, que es

$$C_{n-7} = \mathscr{V}_{n-7}\,\frac{\mathrm{a}_{\overline{7}|i}}{\mathrm{a}_{\overline{7}|i'}} = 727.105{,}18\,\frac{\mathrm{a}_{\overline{7}|0{,}07}}{\mathrm{a}_{\overline{7}|0{,}06}} = 701.954{,}94$$

N. 34

Un capital de 750.000 ptas., se presta en las siguientes condiciones:

- **Amortización en diez años.**
- **Tanto instantáneo de capitalización $\rho = 0{,}11$**
- **Densidad constante del término amortizativo**

Determinar:

1.º La densidad constante del término amortizativo $a'(t) = a'$

2.º Capital pendiente de amortización al principio del cuarto año.

3.º Capital amortizado después de siete años.

1.º La equivalencia financiera en el origen entre prestación y contraprestación es:

$$C_0 = a' \bar{a}_{\overline{n}|i} \text{ con } i = e^{\rho} - 1$$

y de ella se sigue

$$a' = \frac{C_0}{\bar{a}_{\overline{n}|i}} = 750.000 \frac{0,11}{1 - (1 + 0,1163)^{-10}} = 123.664,25$$

ya que $i = e^{0,11} - 1 = 0,1163$

2.º El capital pendiente de amortización en un punto α es:

$$C(\alpha) = a' \bar{a}_{\overline{n-\alpha}|i} = C_0 \frac{\bar{a}_{\overline{n-\alpha}|i}}{\bar{a}_{\overline{n}|i}}$$

Para $\alpha = 3$ resulta:

$$C(3) = C_3 = 123.664,25 \; \bar{a}_{\overline{7}|0,1163} = 603.691,69$$

3.º El capital amortizado hasta un punto α viene dado por la fórmula

$$\mathscr{M}(\alpha) = C_0 - C(\alpha) = C_0 \left(1 - \frac{\bar{a}_{\overline{n-\alpha}|i}}{\bar{a}_{\overline{n}|i}}\right)$$

por lo que al final del séptimo año se tiene:

$$\mathscr{M}(7) = \mathscr{M}_7 = 750.000 \left(1 - \frac{\bar{a}_{\overline{3}|0,1163}}{\bar{a}_{\overline{10}|0,1163}}\right) = 434.008,30$$

N. 35

Se concede un préstamo de 1.500.000 ptas. para ser amortizado en cinco años, en base a la ley $L(t, p) = e^{0,10\,(p-t)}$, y siendo constante la densidad de la cuota de amortización.

Determinar:

1.º La densidad $A'(t) = A'$.

2.º Capital amortizado a los tres años y medio de concertada la operación y capital pendiente de amortización al principio del tercer año.

3.º Densidad del término amortizativo.

1.º La densidad de la cuota de amortización es:

$$A' = \frac{C_0}{n} = \frac{1.500.000}{5} = 300.000$$

2.º El capital amortizado y el pendiente en un punto α son:

$$\mathscr{M}(\alpha) = C_0 \, \frac{\alpha}{n} \; ; \; C(\alpha) = C_0 \, \frac{n-\alpha}{n}$$

por lo que se tiene:

$$\mathscr{M}(3{,}5) = 1.500.000 \, \frac{3{,}5}{5} = 1.050.000 \; ; \; C(2) = 1\,50.000 \frac{3}{5} = 900.000$$

3.º La densidad del término amortizativo es:

$$a'(\alpha) = \rho C(\alpha) + \frac{C_0}{n}$$

para $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$ por lo que se tiene:

$$a'(1) = 432.000 \; ; \; a'(2) = 399.000 \; ; \; a'(3) = 366.000$$
$$a'(4) = 333.000 \; ; \; a'(5) = 300.000.$$

N. 36

Sea una operación de amortización con las siguientes características:

a) **Contractuales**
– **Cuantía del capital prestado 2.000.000 de ptas.**
– **Duración de la operación 5 años.**
– **Tipo de interés anual concertado el 10 %.**
– **Términos amortizativos constantes.**

b) **Comerciales**
– **Gastos iniciales de 25.000 ptas. a cargo del prestatario.**
– **Gastos de administración anuales del 0,5 % sobre el saldo pendiente al principio del año más una cantidad fija de 750 ptas., y a cargo del prestatario.**
– **Gastos finales a cargo del prestatario por un importe del 1,5 % sobre la cantidad demandada en préstamo.**
– **Impuestos anuales del 15 % sobre las cuotas de interés a cargo del prestamista.**

Obtener:

1.º El tanto efectivo activo o del prestamista.

2.º El tanto efectivo pasivo o del prestatario.

Para calcular los tantos efectivos es necesario obtener las magnitudes reales (prestación y contraprestación) que intervienen en la operación.

Además de calcular el término amortizativo constante es preciso obtener su descomposición y las reservas al comienzo de cada uno de los años. Haciendo uso de las fórmulas:

$$a = 2.000.000\, a^{-1}_{\overline{5}|0,10}\ ;\ A_1' = a - 100.000\ ;\ A_s = A_{s-1}\,(1 + 0,10)$$

$$a = I_s + A_s\ ;\ C_s = C_{s-1} - A_s$$

se tiene:

Años s	Términos amortizativos a_s	Cuotas de intereses I_s	Cuotas de amortización A_s	Reserva al principio del año s C_{s-1}
1	527.594,96	200.000,00	327.594,96	2.000.000,00
2	527.594,96	167.240,50	360.354,46	1.672.405,04
3	527.594,96	131.205,06	396.389,90	1.312.050,58
4	527.594,96	91.566,06	436.028,90	915.660,68
5	527.594,96	47.963,18	479.631,78	479.631,78

Las magnitudes reales son:

a) Prestación real del acreedor

$$C_0 = 2.000.000$$

b) Prestación real para el deudor

$$C_0 - G_p^i = 2.000.000 - 25.000 = 1.975.000$$

c) Contraprestación real del deudor.

Está formada por la columna $a_{p,\ s}$, de los términos amortizativos pasivos, de la tabla siguiente:

Años s	a_s	$g_s = 0{,}005\ C_{s-1} + 750$	$a_{p,\ s} = a_s + g_s$
1	527.594,96	10.750,00	538.344,96
2	527.594,96	9.112,03	536.706,99
3	527.594,96	7.310,25	534.905,21
4	527.594,96	5.328,30	532.923,26
5	527.594,96	3.148,16	530.743,12

más los gastos finales que ascienden a:

$$G_p^f = 2.000.000 \times 0{,}015 = 30.000$$

d) Contraprestación real para el acreedor.

Esta formada por las cuotas de intereses netas de impuestos más las cuotas de amortización. La suma de estas dos cuotas constituye el término amortizativo activo y su importe $a_{a,\ s}$ se recoge seguidamente:

s	$I_{a,\ s} = 0{,}85\ I_s$	A_s	$a_{a,\ s} = I_{a,\ s} + A_s$
1	170.000,00	327.594,96	497.594,96
2	142.154,43	360.354,46	502.508,89
3	111.524,30	396.389,90	507.914,20
4	77.831,15	436.028,90	513.860,05
5	40.768,70	479.631,78	520.400,48

Las equivalencias financieras reales y los tantos efectivos que las verifican son:

1.º Del acreedor, activa o del prestamista:

$$2.000.000 = \sum_{s=1}^{5} a_{a,\ s}\ (1 + i_a)^{-s}$$

$$i_a = 0{,}085$$

2.º Del deudor, pasiva o del prestatario

$$1.975.000 = \sum_{s=1}^{5} a_{p,s} (1 + i_p)^{-s} + 30.000 (1 + i_p)^{-5}$$

$$i_p = 0,1104$$

N. 37

Un préstamo de 1.000.000 de ptas., es concedido en las siguientes condiciones:

***a*) Tipo de interés 7 % anual.**

***b*) Duración 10 años.**

***c*) Amortización por anualidades constantes percibiéndose la primera a los tres años de concertada la operación.**

Si el prestatario tiene unos gastos iniciales de 5.000 ptas., y el sistema impositivo le detrae al prestamista el 1 % de las anualidades, determinar:

1.º) Tantos efectivos del prestamista y del prestatario.

2.º) En el supuesto de que el préstamo fuera rescindido después de vencido el sexto pago y la rescisión llevase una penalización del 0,5 % sobre la deuda pendiente, determinar el tanto de coste para el prestatario en este caso.

1.º La anualidad que amortiza el préstamo es:

$$a = 1.000.000 (1 + 0,07)^2 \, a_{\overline{8}|\,0,07}^{-1} = 191.733,84$$

Las magnitudes reales para prestamista y prestatario son:

– Prestación real del acreedor: $C_0 = 1.000.000$.

– Prestación real para el deudor: $C_0 - G_p^i = 1.000.000 - 5.000 = 995.000$

– Contraprestación real del deudor: Está formada por la renta diferida en dos periodos y temporal de ocho de las anualidades de cuantía $a = 191.733,84$.

– Contraprestación real para el acreedor: Es una renta análoga a la anterior con anualidades $0{,}99\ a = 189.816{,}50$.

Por tanto las ecuaciones reales y los tantos efectivos son:

a) Acreedor o prestamista:

$$1.000.000 = 189.816{,}50\ {}^{2/}a_{\overline{8}|i_a}\ ; \quad i_a = 0{,}06825$$

b) Deudor o prestatario

$$995.000 = 191.733{,}84\ {}^{2}/a_{\overline{8}|i_p}\ ; \quad i_p = 0{,}07087$$

2.° La cuantía que hay que abonar para rescindir la operación es:

$$R = C_8 + 0{,}005\ C_8 = 1{,}005 \times 191.733{,}84\ a_{\overline{2}|0{,}07} = 348.391{,}55$$

y las cantidades entregadas por el prestatario en este supuesto son las recogidas en el siguiente esquema:

			a	a	a	a	a	$a + R$
0	1	2	3	4	5	6	7	8

por lo que el tanto efectivo es el valor i'_p tal que

$$995.000\ (1 + i'_p)^8 = 191.733{,}84\ s_{\overline{6}|i'_p} + 348.391{,}55$$

y su cuantía es:

$$i'_p = 0{,}0711$$

N. 38

Una sociedad contrae un préstamo con una entidad bancaria con arreglo a las siguientes características:

- **capital prestado un millón de ptas.**
- **amortización sistema americano.**
- **tanto 6 % anual.**
- **duración 10 años.**

Por otra parte forma un fondo en otro Banco en el cual realizará imposiciones semestrales para conseguir el montante que extinga la deuda y a un tanto del 5 %.

Calcular:

1) **Cuota de interés del 6.º año del préstamo.**

2) **Cuantía constante que hay que imponer en el fondo.**

3) **Tanto efectivo a que resulta la doble operación.**

1) En la amortización americana todas las cuotas de interés son iguales siendo su valor:

$$I = 1.000.000 \times 0{,}06 = 60.000 = I_6$$

2) El esquema del fondo queda recogido así:

	x	x	x	x	.....	x	x
0	$^1/_2$	1	$1 + {}^1/_2$	2	 9	$9 + {}^1/_2$	10

luego

$$2\,x\,s^{(2)}_{\overline{10}|0{,}05} = 1.000.000$$

y efectuando operaciones:

$$x = 39.267{,}43$$

3) La sociedad para cancelar su deuda tiene que entregar una renta anual y una renta semestral. El tanto efectivo de coste de la doble operación será aquel que iguale lo recibido a lo entregado, es decir el que verifique la ecuación

$$1.000.000 = 60.000\ a_{\overline{10}|i_e} + 2 \times 39.267{,}43\ a^{(2)}_{\overline{10}|i_e}$$

y resulta como solución

$$i_e = 0{,}0661$$

N. 39

Una empresa ha recibido en concepto de préstamo 1.000.000 de ptas., que habrá de amortizar mediante 10 anualidades vencidas y siendo el tipo de interés del 6 % para los primeros cuatro años, del 6,5 % para los tres años siguientes y del 7 % para los tres últimos. Sabiendo que los gastos iniciales a cargo del prestatario ascendieron a 11.000 ptas., se pide:

1) Anualidad que amortiza el préstamo.

2) Capital vivo al principio del cuarto año.

3) Cuotas de intereses de los años sexto y noveno.

4) Tantos efectivos del prestamista y del prestatario.

El esquema de la operación concertada es:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1.000.000 & a & a & a & a & a & a & a & a & a & a \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{6\ \%}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{6,5\ \%}} & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{7\ \%}} \end{array}$$

1) De la equivalencia financiera en el origen

$$1.000.000 = a\,[a_{\overline{4}|0,06} + (1+0,06)^{-4}\, a_{\overline{3}|0,065} + \\ + (1+0,06)^{-4}\,(1+0,065)^{-3}\, a_{\overline{3}|0,07}] = 7,2838\, a$$

se sigue

$$a = 137.290,97$$

2) Calculamos C_3 por el método retrospectivo

$$C_3 = 1.000.000\,(1+0,06)^3 - 137.290,97\; s_{\overline{3}|0,06} = 753.936,45$$

3) La cuota de interés del sexto año asciende a

$$I_6 = C_5 \times 0,065 = 137.290,97\,[a_{\overline{2}|0,065} + (1+0,065)^{-2}\, a_{\overline{3}|0,07}]\,0,065 = \\ = 36.894,84$$

y la cuota de intereses del noveno es:

$$I_9 = a - A_9 = a - [C_8 - C_9] = a - a(1 + 0{,}07)^{-2} = 17.375{,}72$$

4) El tanto efectivo del prestamista se obtiene en la ecuación

$$1.000.000 = 137.290{,}97\ a_{\overline{10}|i_a}$$

con solución

$$i_a = 0{,}0622$$

El tanto efectivo para el prestatario se obtiene en la ecuación

$$1.000.000 - 11.000 = 137.290{,}97\ a_{\overline{10}|i_p}$$

por tablas obtenemos

$$i_p = 0{,}0644$$

N. 40

Una entidad bancaria concede un préstamo, con garantía hipotecaria, por un importe de 200.000 a un tipo de interés del 8 % anual para ser amortizado en 10 años, y por el método de cuotas de amortización constantes.

El prestatario tiene unos gastos iniciales para formalización de las garantías del 1,90 % de la cantidad hipotecada y, al final de la operación, para el levantamiento de la escritura hipotecaria, el 2 % de la cantidad hipotecada.

El prestamista verá disminuidos sus ingresos por los impuestos que gravan la operación cuyos tipos de gravamen los suponemos el 24 % sobre los intereses y el 1 % sobre las cuotas de amortización.

Determinar:

1. –El cuadro de amortización del préstamo.

2. –Las anualidades netas de impuestos que recibe el prestamista.

3. –Tanto efectivo del prestamista.

4. –Tanto efectivo del prestatario.

1. –Por tratarse de un préstamo amortizable con cuotas de amortización constantes el cuadro de amortización es:

s	a_s	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
0	—	—	—	—	200.000
1	36.000	16.000	20.000	20.000	180.000
2	34.400	14.400	20.000	40.000	160.000
3	32.800	12.800	20.000	60.000	140.000
4	31.200	11.200	20.000	80.000	120.000
5	29.600	9.600	20.000	100.000	100.000
6	28.000	8.000	20.000	120.000	80.000
7	26.400	6.400	20.000	140.000	60.000
8	24.800	4.800	20.000	160.000	40.000
9	23.200	3.200	20.000	180.000	20.000
10	21.600	1.600	20.000	200.000	00.000

2. –Las anualidades netas de impuestos son de la forma

$$a_{a,\,s} = I_s + \frac{C_0}{n} - 0{,}24\, I_s - 0{,}01\, \frac{C_0}{n} = 0{,}76\, I_s + 0{,}99 \frac{C_0}{n}$$

por lo que las cantidades libres de impuestos serán las del cuadro siguiente:

s	$0{,}76\, I_s$	$0{,}99\, a_s$	$a_{a,\,s}$
1	12.160	19.800	31.960
2	10.944	19.800	30.744
3	9.728	19.800	29.528
4	8.512	19.800	28.312
5	7.296	19.800	27.096
6	6.080	19.800	25.880
7	4.864	19.800	24.664
8	3.648	19.800	23.478
9	2.432	19.800	22.232
10	1.216	19.800	21.016

obsérvese que

$$a_{a,\,s} = a_{a,\,s-1} - 1.216$$

3. –Tanto efectivo del prestamista.

Es el valor i_a tal que

$$200.000 = A_{(31.960;\,-1.216)\,\overline{10}|\,i_a} =$$

$$= \left(31.960 - \frac{1.216}{i_a} - 12.160\right) a_{\overline{10}|\,i_a} + \frac{12.160}{i_a}$$

y su cuantía es:

$$i_a = 0{,}05928$$

4. –Tanto efectivo del prestatario

Los gastos iniciales del prestatario ascienden a:

$$200.000 \times 0{,}019 = 3.800$$

y los gastos al final de la operación suponen

$$200.000 \times 0{,}02 = 4.000$$

De donde, la ecuación del tanto efectivo es:

$$200.000 - 3.800 = A_{(36.000;\,-1.600)\,\overline{10}|\,i_p} + 4.000\,(1 + i_p)^{-10}$$

con solución

$$i_p = 0{,}0877$$

N. 41

Una entidad bancaria concede un préstamo, con garantía personal, de 500.000 ptas. para ser amortizado en 5 años por el método francés al tipo de interés legal que en el momento de concesión es el 7 %. Si suponemos que los impuestos en este tipo de operaciones son:

– El 1,10 % en el momento inicial y a cargo del prestatario sobre la cuantía del préstamo.

– El 24 % de los intereses a cargo del prestamista y si, además, dentro de dos años el tipo de interés pasa a ser el 7,5 % se pide:

1) Cantidades anuales que el prestatario tiene que entregar para cancelar la deuda.

2) Tanto efectivo a que le resulta la operación al prestatario.

3) Cantidades anuales netas de impuestos que recibirá el prestamista.

1) De acuerdo con las condiciones iniciales la anualidad que amortiza el préstamo es:

$$a_1 = 500.000\ a^{-1}_{\overline{5}|0,07} = 121.945,35$$

Al producirse la variación del tipo de interés el capital pendiente de amortización asciende a:

$$C_2 = 121.945,35\ a_{\overline{3}|0,07} = 320.023,11$$

y deberá ser amortizado mediante la entrega de tres anualidades constantes de acuerdo con las nuevas condiciones. La nueva anualidad resulta:

$$a_2 = 320.023,11\ a_{\overline{3}|0,075} = 123.060,93$$

El prestatario tiene que entregar durante los dos primeros años una anualidad de 121.945,35 ptas. y en los tres restantes 123.060,93. La descomposición de estas anualidades en sus componentes cuota de intereses y cuota de amortización es:

Años	Anualidades	Cuotas de intereses	Cuotas de amortizacion
1	121.945,35	35.000,00	86.945,35
2	121.945,35	28.913,81	93.031,54
3	123.060,93	24.001,73	99.059,20
4	123.060,93	16.572,30	106.488,63
5	123.060,93	8.585,65	114.475,28

2) El enfrentamiento de lo recibido realmente en el momento inicial que es,

$$500.000 - 0{,}011 \times 500.000 = 494.500$$

con las anualidades a entregar para cancelar la deuda permite determinar el tanto efectivo i_p en la ecuación:

$$494.500 = 121.945{,}35\, a_{\overline{2}|i_p} + 123.060{,}93\, {}^{2/}a_{\overline{3}|i_p}$$

lo cual se cumple para

$$i_p = 0{,}07602$$

3) El prestamista recibirá íntegras las cuotas de amortización y el 76 % de las cuotas de interés ya que los impuestos son el 24 % restante. El cuadro siguiente recoge lo recibido realmente por el prestamista:

Años	Cuotas de amortización	Cuotas de intereses netas de impuestos	Anualidades netas de impuestos
1	86.945,35	35.000,00 × 0,76 = 26.600	113.545,35
2	93.031,54	28.913,81 × 0,76 = 21.974,50	115.006,04
3	99.059,20	24.001,73 × 0,76 = 18.241,31	117.300,51
4	106.488,63	16.572,30 × 0,76 = 12.594,95	119.083,58
5	114.475,28	8.585,65 × 0,76 = 6.525,09	121.000,37

N. 42

Un particular solicita un préstamo de cierta financiera por un valor de dos millones de ptas. Dicho señor quiere amortizarlo así:

a) Entregando una renta perpetua que disfruta cuyo importe mensual es de 5.000 ptas.

b) La cantidad que falta la abonará mediante diez anualidades vencidas, comenzando el periodo de pagos una vez transcurridos los dos primeros años de la formalización del contrato.

El tanto de valoración de estas cantidades es del 6 %.

Una vez realizados cuatro pagos, dicho señor, solicita pagar solamente los intereses durante dos años y prolongar dos años más la amortización. La financiera consiente en el pago de los intereses y en prolongar solamente un año más la amortización del préstamo y con la condición de que el tanto sea el 7 %.

Se pide:

1) Anualidad primera.

2) Cuota de amortización del cuarto pago.

3) Cuota de intereses del tercer pago.

4) Intereses del periodo de demora.

5) Nueva anualidad.

6) Tantos efectivos del prestamista y del prestatario para el total de la operación, si hubo unos gastos iniciales de 10.000 ptas. a cargo del prestatario.

El préstamo se concede por la cuantía que queda después de deducir a los dos millones de pesetas el valor de la renta perpetua, es decir:

$$C_0 = 2.000.000 - 5.000 \times 12\ a^{(12)}_{\overline{\infty}|0,06} = 972.789,3$$

1.–La anualidad que amortiza el préstamo es:

$$a = 972.789,3\ (1 + 0,06)^2\ a^{-1}_{\overline{10}|0,06} = 148.507,22$$

2.– La cuota de amortización del cuarto pago asciende a:

$$A_6 = C_5 - C_6 = a\ (a_{\overline{7}|} - a_{\overline{6}|}) = 148.507,22\ (1 + 0,06)^{-7} = 98.757,3$$

3.– La cuota de intereses del quinto año resulta:

$$I_5 = a - A_5 = 148.507,22 - 98.757,3\ (1 + 0,06)^{-1} = 55.339,87$$

4.– Al producirse la transformación de la operación la deuda pendiente resulta:

$$C_6 = 148.507,22\ a_{\overline{6}|0,06} = 730.157,9$$

y los intereses que abona en cada año de los de demora son:

$$I_m = 730.157,9 \times 0,07 = 51.111,05$$

5.– Al principio del noveno año la deuda pendiente es la misma que la del principio del séptimo año. Al tener que amortizarse en cinco anualidades a un tanto del 7 % anual, la cuantía de la nueva anualidad será:

$$a_1 = 730.157{,}9 \cdot a^{-1}_{\overline{5}|0{,}07} = 178.088{,}2$$

6.– El tanto efectivo del prestamista para el conjunto de toda la operación es el que verifique la ecuación:

$$2.000.000 = 60.000\ a^{(12)}_{\overline{\infty}|i_a} + 148.507{,}22\ {}^{2/}a_{\overline{4}|i_a} +$$
$$+ 51.111{,}05\ {}^{6/}a_{\overline{2}|i_a} + 178.088{,}2\ {}^{8/}a_{\overline{5}|i_a}$$

y su valor

$$i_a = 0{,}0611$$

El tanto efectivo para el prestatario es el que se deduce de

$$2.000.000 - 10.000 = 60.000\ a^{(12)}_{\overline{\infty}|i_p} + 148.507{,}22\ {}^{2/}a_{\overline{4}|i_p} +$$
$$+ 51.111{,}05\ {}^{6/}a_{\overline{2}|i_p} + 178.088{,}2\ {}^{8/}a_{\overline{5}|i_p}$$

y es

$$i_p = 0{,}0616$$

N. 43

El Banco de Crédito Industrial concede préstamos con las siguientes características:

Duración máxima 20 años.

Tipo de interés: 5 % para los primeros cinco años, 6 % para los siguientes cinco años y el 7 % para los últimos diez años.

Cuantía máxima veinte millones.

La devolución puede realizarse mediante una de las alternativas siguientes:

a) Mediante anualidades constantes abonando la primera a los dos años de concertada la operación.

b) Abonando intereses anuales y reintegrando el principal en fecha del vencimiento.

c) No abonando intereses anuales y entregando el montante final del periodo estipulado, teniendo en cuenta que, en este caso, se computarán intereses del 6 % en los primeros 10 años y el 7 % en los 10 últimos.

Una empresa que solicita un préstamo de quince millones de pesetas para reintegrarlo en 14 años, si tiene la oportunidad de abrir un fondo que le abona intereses del 6 % y teniendo que imponer la primera cuantía dentro de un año, ¿cuál de las opciones le pueden interesar más?

El préstamo solicitado es posible conseguirse pues, tanto la cuantía como la duración son inferiores a los plazos máximos.

La elección entre las opciones se realizará en base al tanto de coste unitario de cada una de ellas.

Hay que determinar los tantos efectivos de las tres modalidades que ofrece el Banco más dos combinadas pues, las modalidades b y c admiten jugar con el fondo (desde el punto de vista de la empresa).

Analizaremos cada modalidad:

Modalidad a

El esquema de su operación es.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
15.10^6 & & a & a & a & a & a & a & a & a & a & a & a & a & a \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\
\multicolumn{6}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{5\ \%}} & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{6\ \%}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{7\ \%}}
\end{array}$$

La determinación de la anualidad se efectúa a través de la ecuación de equilibrio siguiente.

$$15.000.000 = a \left[{}^{1/}a_{\overline{4|}0,05} + (1 + 0,05)^{-5}\, a_{\overline{5|}0,06} + \right.$$

$$\left. + (1 + 0,05)^{-5} (1 + 0,06)^{-5}\, a_{\overline{4|}0,07} \right] = a \times 8,66079274$$

y resulta

$$a = 1731.943,074$$

El tanto de coste se calcula enfrentando la cantidad a percibir con la renta a entregar, es decir:

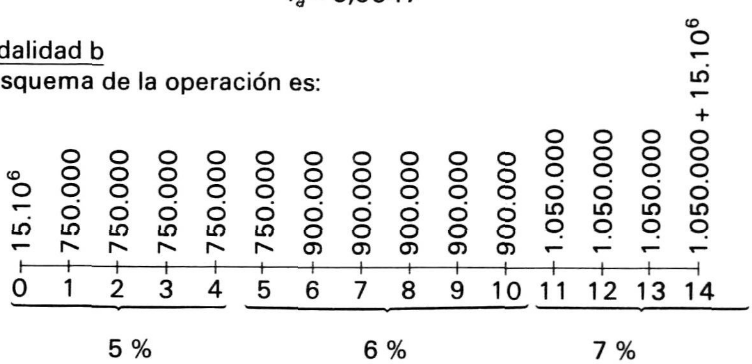
$$15.000.000 = 1731.943,074\ {}^{1/}a_{\overline{13|}i_a}$$

y su valor es:

$$i_a = 0{,}0547$$

modalidad b

El esquema de la operación es:



El tanto efectivo es el que satisface la igualdad

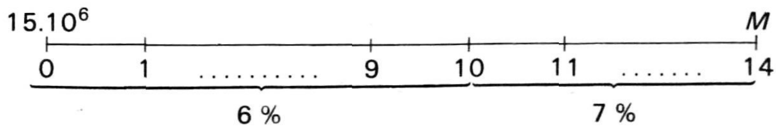
$$15.000.000 = 750.000\, a_{\overline{5}|i_b} + 900.000\, {}^{5/}a_{\overline{5}|i_b} +$$
$$+\, 1.050.000\, {}^{10/}a_{\overline{4}|i_b} + 1.500.000\, (1 + i_b)^{-14}$$

y asciende a:

$$i_b = 0{,}05765$$

modalidad c

El esquema de la operación es:



con $M = 15.000.000\,(1 + 0{,}06)^{10}\,(1 + 0{,}07)^4 = 35.211.540{,}30$

El tanto efectivo es el valor i_c tal que

$$15.000.000 = (1 + i_c)^{-14}\; 35.211.540{,}30$$

de aquí

$$i_c = 0{,}06216$$

<u>Modalidad b combinada con fondo</u>

Para conseguir el principal se abrirá el fondo F_1 que sea suficiente es decir que

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & 15.10^6 \\ & F_1 & F_1 & F_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & F_1 & & F_1 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 13 & & 14 \end{array}$$

de donde

$$F_1\, s_{\overline{14}|0{,}06} = 15.000.000$$

y despejando

$$F_1 = \frac{15.000.000}{s_{\overline{14}|0{,}06}} = 713.773{,}63$$

Luego para extinguir la deuda hace falta entregar por una parte los intereses de cada periodo y por otra la renta de término constante F_1 por lo que el tanto efectivo será la solución de la ecuación

$$15.000.000 = 750.000\, a_{\overline{5}|i'_b} + 900.000\, {}^{5/}a_{\overline{5}|i'_b} +$$
$$+ 1.050.000\, {}^{10/}a_{\overline{4}|i'_b} + 713.773{,}63\, a_{\overline{14}|i'_b}$$

y resulta

$$i'_b = 0{,}05598$$

<u>Modalidad c combinada con fondo</u>

El fondo que se abrirá debe ser suficiente para conseguir el capital a entregar al final de la operación de donde el esquema será.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & M=35.211.540{,}30 \\ & F_2 & F_2 & F_2 & \ldots\ldots\ldots & F_2 & F_2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots\ldots & 13 & 14 \end{array}$$

y por tanto

$$F_2 = \frac{35.211.540{,}30}{s_{\overline{14}|0{,}06}} = 1.675.537{,}94$$

El tanto efectivo lo obtenemos en la ecuación:

$$15.000.000 = 1.675,537,94 \; a_{\overline{14|}\, i'_c}$$

y su valor es

$$i'_c = 0,0661$$

Los valores obtenidos son:

$$i_a = 0,0547 \quad ; \quad i_b = 0,05765 \quad ; \quad i_c = 0,06216;$$

$$i'_b = 0,05598 \quad ; \quad i'_c = 0,0661$$

y la alternativa a elegir es la a.

N. 44

Una sociedad contrae un préstamo de 100.000 ptas. comprometiéndose a amortizarlo en 10 anualidades realizando el primer pago cuatro años después de concertada la operación. El tipo de interés pactado es el 6 % anual.

Realizados cuatro pagos la Sociedad quiere cancelar sus obligaciones pendientes para lo cual busca otra entidad que abonándole cierta cantidad se encargará ésta de su amortización. Si la operación se realiza sobre una base del 7 %, se pregunta:

1) Cuantía del pago a efectuar por la Sociedad.

2) Tanto efectivo a que resulta su operación.

El esquema de la operación de préstamo concertada es:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 100.000 & & & & a & a & a & a & a & a & a & a & a & a \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{array}$$

y la anualidad que lo amortiza es:

$$a = 100.000\,(1 + 0,06)^3 \; a^{-1}_{\overline{10|}\,0,06} = 16.182,09$$

1) Para desligarse de la operación, una vez realizados cuatro pagos, la sociedad tendrá que abonar el valor del préstamo que será:

$$\mathcal{V}_8 = 16.182,091 \; a_{\overline{6|}\,0,07} = 77.132,58$$

2) Su cálculo se realizará en el momento de desligarse de la operación al enfrentarse las magnitudes reales, dando lugar a la ecuación

$$100.000\ (1+i_e)^8 = 16.182{,}09\ s_{\overline{4}|i_e} + 77.132{,}58$$

$$i_e = 0{,}0491$$

N. 45

Un señor X realiza un préstamo por un importe de un millón de ptas., a cierta S. A.

El préstamo será rembolsado mediante diez anualidades constantes vencidas y realizándose el pago de la primera a los tres años de concertada la operación.

El tanto de interés es del 6 %.

Después de percibida la tercera anualidad el prestamista vende su préstamo valorándolo a un tanto del 5,5 %. Con el importe de la nuda propiedad adquiere una finca rústica. Con el usufructo adquiere el derecho a una pensión mensual de duración quince años.

Se pide:

1) Valor de la finca.

2) Cuantía de renta que percibirá al principio de cada mes, si el tanto de valoración de ésta es el 5 %.

La anualidad que amortiza el préstamo es:

$$a = 1.000.000\ (1+0{,}06)^2\ a^{-1}_{\overline{10}|0{,}06} = 152.661{,}23$$

por lo que el valor del préstamo al principio del sexto año de concertada la operación resulta:

$$\mathscr{V}_5 = 152.661{,}23\ a_{\overline{7}|0{,}055} = 867.568{,}75$$

y el capital vivo

$$C_5 = 152.661{,}23\ a_{\overline{7}|0{,}06} = 852.213{,}217$$

Para obtener los valores del usufructo y de la nuda propiedad acudimos al sistema

$$\mathscr{V}_5 = \mathscr{U}_5 + \mathscr{N}_5$$

$$\mathscr{U}_5 = \frac{0{,}06}{0{,}055}\,(C_5 - \mathscr{N}_5)$$

sustituyendo $\mathscr{V}_5$ y N_5 por los valores obtenidos,

$$867.568{,}75 = \mathscr{U}_5 + \mathscr{N}_5$$

$$\mathscr{U}_5 = \frac{0{,}06}{0{,}055}\,(852.213{,}217 - \mathscr{N}_5)$$

resolviendo el sistema tenemos:

$$\mathscr{U}_5 = 184.264{,}50\ ;\ \mathscr{N}_5 = 683.304{,}35$$

1) El valor de la finca es

$$\mathscr{N}_5 = 683.304{,}35$$

2) El valor de la mensualidad de renta, X, se calcula en

$$\mathscr{U}_5 = 12\,X\,a^{(12)}_{\overline{15}|0{,}05} = 12\,X\left(1 + \frac{j_{(12)}}{12}\right)\frac{0{,}05}{j_{(12)}}\,a_{\overline{15}|0{,}05} = 184.264{,}50$$

y es su valor:

$$X = \frac{184.264{,}50}{12\left(1 + \frac{j_{(12)}}{12}\right)}\ \frac{j_{(12)}}{0{,}05}\,a^{-1}_{\overline{15}|0{,}05} = 1.506{,}83$$

N. 46

Hace diez años un inversor abrió en una entidad bancaria, una cuenta de ahorro comprometiéndose a imponer 5.000 ptas., al final de cada mes. El tanto de interés concertado en la operación fue el 5 % anual efectivo.

En el momento actual, con los dos tercios del montante constituido concede un préstamo a una entidad, a un tanto del 6,5 % anual y para ser amortizado mediante diez anualidades constantes comenzando a realizar los pagos durante el cuarto año de concertada la operación y al final de cada año.

Con el tercio restante del montante, adquiere el derecho a una renta, que percibirá al principio de cada trimestre teniendo lugar el primer cobro dentro de tres meses y siendo su duración 15 años. El tanto de valoración de esta renta es el 5 % anual efectivo.

Se pide:

1.° Cuantía constante de renta que se percibirá cada trimestre.

2.° Si después de cobrada la cuarta anualidad del préstamo decide vender éste a un tanto del 5,5 % determinar el valor del préstamo, el valor del usufructo y el valor de la nuda propiedad.

El montante conseguido con las imposiciones mensuales durante 10 años es:

$$M = 5.000 \times 12\, s^{(12)}_{\overline{10|}\,0,05} = 771.815,80$$

por lo que el préstamo que concede tiene una cuantía

$$C_0 = 514.543,87$$

y el valor de la renta que adquiere es:

$$R = 257.271,93$$

1.° La cuantía trimestral de la renta es el valor X tal que:

$$257.271,93 = 4 \cdot X\, a^{(4)}_{\overline{15|}\,0,05}$$

luego

$$X = \frac{257.271{,}93}{4} \quad \frac{j_{(4)}}{0{,}05} \; a^{-1}_{\overline{15|}\,0{,}05} = 6.083{,}63$$

2.º El esquema de la operación de préstamo es:

$C_0 = 514.543{,}87$				a	a	a	a	....	a	a
0	1	2	3	4	5	6	7	....	12	13

por lo que se tiene:

$$a = 514.543{,}87\ (1 + 0{,}065)^3\ a^{-1}_{\overline{10|}\,0{,}065} = 86.459{,}55$$

$$C_7 = 86.459{,}55\ a_{\overline{6|}\,0{,}065} = 418.551{,}88$$

El valor del préstamo al vender es:

$$\mathscr{V}_7 = 86.459{,}55\ a_{\overline{6|}\,0{,}055} = 431.911{,}30$$

El sistema:

$$431.911{,}30 = \mathscr{U}_7 + \mathscr{N}_7$$

$$\mathscr{U}_7 = \frac{0{,}065}{0{,}055}\left[418.551{,}88 - \mathscr{N}_7\right]$$

tiene por solución:

$$\mathscr{U}_7 = 86.836{,}24 \ ; \ \mathscr{N}_7 = 345.075{,}06$$

N. 47

Un propietario de una finca urbana de la que percibe unos alquileres de 30.000 ptas. mensuales, cuyos gastos mensuales son el 10 % de los ingresos y las contribuciones son 20.000 ptas. por semestre, vende dicha finca a un tanto del 6 %. Con el dinero obtenido concede un préstamo a cierta S. A. para ser amortizado en 15 años abonándose intereses semestrales del 3,5 % y siendo la amortización anual (mediante método francés).

Transcurridos cinco año dicho señor vende el préstamo sobre la base de un interés del 6,5 % anual. Con el valor del usufructo adquiere

acciones de cierta entidad bancaria cuyo nominal es de 500 ptas. y se cotizan a 400 enteros. Con el valor de la nuda propiedad adquiere una finca rústica evaluada al 5 %.

Determinar:

1) Valor finca urbana.

2) Valor del préstamo al vender.

3) Número de acciones que puede adquirir.

4) Rendimientos anuales de la finca rústica.

1) El valor de la finca urbana se determinará a través de la renta neta percibida, es decir, a través de la ecuación

$$V_f = 360.000\, a^{(12)}_{\overline{\infty}|0,06} - 36.000\, a^{(12)}_{\overline{\infty}|0,06} - $$
$$- 40.000\, a^{(12)}_{\overline{\infty}|0,06} = 4.900.417,3$$

2) El importe del préstamo concedido es 4.900.417,3 ptas. y la anualidad que lo amortiza la resultante de la ecuación

$$4.900.417,3 = a_{\overline{15}|i} \text{ con } i = (1 + 0,035)^2 - 1 = 0,071225$$

de aquí

$$a = 542.209,91$$

El sistema

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{V}^{(2)}_5 &= \mathscr{U}^{(2)}_5 + \mathscr{N}_5 \\ \mathscr{U}^{(2)}_5 &= \frac{j_{(2)}}{j'_{(2)}} (C_5 - \mathscr{N}_5) \end{aligned}\right\}$$

da los valores de $\mathscr{V}^{(2)}_5$ y $\mathscr{U}^{(2)}_5$ previo cálculo de C_5 y $\mathscr{U}_5$ cuyos valores son:

$$C_5 = 542.209,91\, a_{\overline{10}|0,071225} = 3.786.784,20$$

$$\mathscr{N}_5 = A_{(A_6\,;\;1+i)\overline{10}|0,065} =$$

$$= A_{(272.496,25\;;\;1+0,071225)\overline{10}|0,065} = 2.627.009,60$$

Sustituyendo en el sistema los valores obtenidos queda de la forma:

$$\mathscr{V}_5^{(2)} = \mathscr{U}_5^{(2)} + 2.627.009{,}60$$

$$\mathscr{U}_5^{(2)} = \frac{0{,}07}{0{,}06398}\,(3.786.784{,}20 - 2.627.009{,}60)$$

conduciendo a los valores:

$$\mathscr{V}_5^{(2)} = 3.895.909{,}60 \;;\; \mathscr{U}_5^{(2)} = 1.268.900$$

3) El número de acciones que puede adquirir será:

$$n = \frac{1.268.900}{2.000} = 634 \text{ y hay un sobrante de 900 ptas.}$$

4) El valor de la finca rústica evaluada según su renta coincide con el valor de la nuda propiedad. Si designamos por R los rendimientos anuales se verificará que

$$N_5 = R\, a_{\overline{\infty|}\,0{,}05}$$

de aquí

$$R = 0{,}05\, N_5 = 131.350{,}48$$

N. 48

Un préstamo francés de 3.000.000 de ptas. concedido hace 5 años para ser amortizado en 15 años y siendo el tipo de interés el 6 % anual es vendido hoy a un tanto del 7 % adquiriéndose con el usufructo acciones de cierta S. A. de nominal 500 ptas. cuya cotización es de 275 enteros, y con la nuda propiedad una finca urbana que produce un rendimiento del 7,5 % anual.

Determinar:

1.º Número de acciones que es posible adquirir

2.º Alquiler mensual que se percibe de la finca al principio de cada mes.

Los valores del préstamo y del capital vivo son:

$$\mathscr{V}_5 = 3.000.000 \frac{a_{\overline{10}|0,07}}{a_{\overline{15}|0,06}} = 2.169.505,75$$

$$C_5 = 3.000.000 \frac{a_{\overline{10}|0,06}}{a_{\overline{15}|0,06}} = 2.273.415,68$$

El sistema:

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{U}_5 + \mathscr{N}_5 &= 2.169.505,75 \\ \mathscr{U}_5 &= \frac{0,06}{0,07}(2.273.415,68 - \mathscr{N}_5) \end{aligned}\right\}$$

da la solución:

$$\mathscr{U}_5 = 632.459,58 \ ; \ \mathscr{N}_5 = 1.537.046,17$$

1.° El número de acciones que se pueden adquirir es

$$n = \frac{632.459,58}{500 \times 2,75} = 459 \text{ acciones y sobran } 1.334,58 \text{ ptas.}$$

2.° El rendimiento mensual de la finca urbana es el valor X tal que

$$1.537.046,17 = 12X\, a^{(12)}_{\overline{\infty}|0,075}$$

y efectuando operaciones

$$X = 8.635,12$$

N. 49

Un préstamo de 2.500.000 ptas., tiene que amortizarse en 20 años por el método de cuotas de amortización constantes venciendo la primera a los cinco años de concertada la operación. Los intereses se abonarán anualmente a un tanto del 6 % anual.

El acreedor a los seis años y medio del comienzo de la operación vende la nuda propiedad a un tanto del 6,5 % adquiriendo con el dinero

obtenido, una finca urbana. En ese momento el acreedor decide imponer, en lo sucesivo los intereses del préstamo en una entidad bancaria que capitaliza el 4 % anual.

Se pide:

1.º Calcular la renta anual de la finca sabiendo que su tanto interno de rendimiento coincide con el de venta de la nuda propiedad.

2.º Montante constituido con los intereses en la entidad bancaria al final de la amortización del préstamo.

Por abonarse sólo intereses en los cuatro primeros años a partir de este momento el esquema de la operación es idéntico al préstamo amortizable con cuotas de amortización constantes por lo que se tiene:

$$C_4 = C_0 = 2.500.000 \ ; \ A = \frac{C_0 i}{n-4} = 156.250$$

$$a_{s+1} = a_s - \frac{C_0 i}{n-4} = a_s - 9.375 \text{ con } a_5 = 150.000 + 156.250 = 306.250$$

$$I_{s+1} = I_s - \frac{C_0 i}{n-4} = I_s - 9.375 \text{ con } I_5 = 2.500.000 \times 0,06 = 150.000$$

1.– A los seis años y medio del comienzo de la operación el valor de nuda propiedad es

$$\mathcal{N}_{6+1/2} = 156.250\,(1+0,065)^{-\frac{6}{12}}\, a_{\overline{13}|0,065} = 1.386.701,6$$

y el rendimiento anual de la finca adquirida con el valor de la nuda propiedad

$$R = 1.386.701,6 \times 0,065 = 90.135,6$$

2.– El montante que se podrá formar con los intereses del préstamo a partir de estos momentos es,

$$M = S_{(I_7\,;\,-9375)\,\overline{14}|0,04} = S_{(150.000\,-\,18.750\,;\,-\,9.375)\,\overline{14}|0,04} =$$

$$= \left[131.250 - \frac{9,375}{0,04}\right] s_{\overline{14}|0,04} + \frac{9.375\ 14}{0,04} = 1.394.898$$

N. 50

Un ahorrador concedió a una Sociedad, hace 3 años un préstamo de 1.000.000 de ptas. para ser amortizado en 10 años por el método francés a un tanto del 7 % anual. Las anualidades vencidas hasta estos momentos han sido colocadas, a medida que se han recibido en una entidad bancaria que capitaliza al 6 % anual.

Determinar:

1.° Anualidad que amortiza el préstamo.

2.° Cantidad que se tiene en la entidad bancaria.

3.° En el supuesto que el ahorrador entregara hoy como entrada en la compra de un piso, cuyo precio al contado es de 800.000 ptas. la cantidad del apartado anterior y el resto fuera amortizado mediante el número de anualidades del préstamo que fueran suficientes determinar el número de éstas si la constructora trabaja a un tipo de interés del 8 % anual.

1.– La anualidad que amortiza el préstamo es:

$$a = 1.000.000\ a^{-1}_{\overline{10}|0,07} = 142.377,50$$

2.– El capital que se ha formado en la entidad bancaria asciende a:

$$M = 142.377,50\ S_{\overline{3}|0,06} = 453.273$$

3.– La cantidad que queda para pagar aplazada en la compra del piso resulta:

$$800.000 - 453.273 = 346.727$$

El número de anualidades del préstamo necesarias para liquidar la deuda pendiente lo determinaremos por recurrencia. Así:

Dentro de un año el valor de la deuda es:

$$346.727\ (1 + 0,08) = 374.465,16$$

pero al abonarse las 142.377,5 la deuda pendiente es

$$374.465,16 - 142.377,50 = 232.087,66$$

al final del segundo año el valor de la deuda es

$$232.087{,}66\ (1 + 0{,}08) = 250.654{,}67$$

quedando después del abono de la segunda anualidad un saldo de 108.277,17, por fin al final del tercer año la situación del saldo es 116.939,35 ptas. por lo que con la anualidad hay suficiente para extinguir la deuda quedando un sobrante de 25.438,15. En conclusión para liquidar las 346.727 ptas. son suficientes dos anualidades de 142.377,5 ptas. y un pago de 116.939,35 al final del tercer año.

N. 51

La empresa constructora COMPSA solicita un préstamo de cinco millones de ptas. para realizar la edificación de 25 viviendas, al organismo oficial correspondiente. Dicha entidad concede los préstamos para comenzar a ser reintegrados a partir de los dos años de concertada la operación mediante pagos constantes trimestrales vencidos sobre la base de un interés del 6 % anual efectivo y una duración total de 10 años.

Teniendo en cuenta que el solar en el cual se va ha realizar la construcción ya era propiedad de la Empresa y su coste se evalúa en 1.200.000 ptas., que la Empresa determina el precio de venta incrementando el coste en un 20 % y que está prevista la terminación de las obras y entrega de llaves para dentro de dos años, se pide:

1.– Las mensualidades que habrán de abonar los compradores en las distintas modalidades de venta que practica, teniendo en cuenta que la firma de los contratos tiene lugar en el momento actual, si las cantidades aplazadas llevan un tipo de interés de 8 % anual, y los tipos de contratos son:

a) El 25 % a la firma del contrato y el resto a la entrega de llaves (En esta modalidad no se cargan intereses a la cantidad aplazada).

b) Un 25 % a la firma del contrato, otro 25 % a la entrega de llaves y el resto en mensualidades vencidas durante 8 años, a partir de la entrega de llaves.

c) Un 15 % a la firma del contrato, un 15 % a la entrega de llaves y el resto en mensualidades vencidas durante 5 años, a partir de la firma del contrato.

d) Un 20 % a la firma del contrato y el resto en mensualidades vencidas durante 6 años abonando la primera dentro de un mes.

2.– Cantidades que ha de entregar trimestralmente la empresa para amortizar el préstamo.

3.– En el supuesto que la empresa vendedora concertara con una entidad bancaria los pagos del préstamo y los cobros de las cantidades aplazadas de la venta de las viviendas ¿qué saldo habría en la entidad al final de la amortización del préstamo si el tipo de interés concertado es el 5 % anual, si se han vendido 2 viviendas con el tipo de contrato a, 8 con el tipo de contrato b, 8 con el tipo de contrato c y 7 con el tipo de contrato d?

1.– El precio de coste de las viviendas a la terminación de obras, que designaremos por P se obtendrá reflejando en ese momento todas las cantidades pagadas, capitalizando al tipo de interés de trabajo de la empresa que es el 8 %. O sea:

$$1.200.000\ (1+0{,}08)^2 + 5.000.000\ (1+0{,}08)^2 = 25\ P$$

efectuando operaciones y despejando es

$$P = \frac{7.231.680}{25} = 289.267{,}20$$

El precio de venta al contado a la terminación de obras es:

$$P_V = 289.267{,}20 \times 1{,}20 = 347.120{,}64$$

y el precio de venta al contado al comienzo de obras

$$P_{vo} = 347.120{,}64\ (1+0{,}08)^{-2} = 297.600$$

Para determinar las cantidades aplazadas en cada modalidad de contrato referiremos las equivalencias financieras al momento origen de la operación, y resulta:

MODALIDAD a.

Se abonará en estos momentos $297.600 \times 0{,}25 = 74.400$ y dentro de dos años $297.600 \times 0{,}75 = 223.200$

MODALIDAD b.

Designando por b la mensualidad se tiene

$$297.600 = 74.400 + 74.400\ (1 + 0{,}08)^{-2} + 12\ b\ {}^{2/}a^{(12)}_{\overline{8}|0{,}08}$$

de donde

$$b = 2.602{,}27$$

MODALIDAD c.

Designando por c la mensualidad resulta:

$$297.600 = 297.600 \times 0{,}15 + 297.600 \times 0{,}15\ (1 + 0{,}08)^{-2} +$$

$$+ 12\ c\ a^{(12)}_{\overline{5}|0{,}08} = 44.640 + 38.271{,}60 + 12\ c\ \frac{0{,}08}{j_{(12)}}\ a_{\overline{5}|0{,}08}$$

y su valor es:

$$c = 4.323{,}48$$

MODALIDAD d.

Designando por d la mensualidad se tendrá

$$297.600 = 297.600 \times 0{,}20 + 12\ d\ a^{(12)}_{\overline{6}|0{,}08}$$

y operando

$$d = 4.141{,}92$$

2.– Las cantidades X que la empresa tendrá que entregar para cancelar la deuda se obtienen en la ecuación

$$5.000.000 = 4\ X\ {}^{2/}a^{(4)}_{\overline{8}|0{,}06}$$

despejando

$$X = \frac{5.000.000\ (1 + 0{,}06)^2}{4}\ \frac{j_{(4)}}{0{,}06}\ a^{-1}_{\overline{8}|0{,}06} = 229.671{,}97$$

3.– Para determinar el saldo de la cuenta habrá que referir al año diez todos los pagos y cobros realizados por el Banco.

El valor de los pagos realizados es:

$$4.229.671{,}97\ \mathbf{S}^{(4)}_{\overline{8}|0{,}05} = 8.934.842{,}75$$

El valor de los cobros a efectuar al fin de la operación es:

<u>MODALIDAD a.</u>

El valor de los cobros por vivienda es:

$$223.200\ (1 + 0{,}05)^8 = 329.768{,}05$$

por venderse dos viviendas el valor total resulta:

$$A = 2 \times 329.768{,}05 = 659.536{,}10$$

<u>MODALIDAD b.</u>

El valor de los cobros por vivienda asciende a:

$$74.400\ (1 + 0{,}05)^8 + 2.602{,}27 \times 12\ \mathbf{S}^{(12)}_{\overline{8}|0{,}05} =$$

$$= 109.922{,}68 + 305.047{,}25 = 414.969{,}93$$

y el valor total por venderse 8 viviendas

$$B = 8 \times 414.969{,}93 = 3.319.759{,}44$$

<u>MODALIDAD c.</u>

Como el valor de los cobros por vivienda es,

$$44.640\ (1 + 0{,}05)^8 + 4.323{,}48 \times 12\ {}^{5/}\mathbf{S}^{(12)}_{\overline{5}|0{,}05} =$$

$$= 65.953{,}61 + 374.186{,}04 = 440.139{,}65$$

por venderse 8 viviendas el valor total supone

$$C = 8 \times 440.139{,}65 = 3.521.117{,}20$$

MODALIDAD d.

El valor de los cobros por vivienda es

$$4.141{,}92 \times 12\ {}^{4/}s^{(12)}_{\overline{6}|0{,}05} = 420.265{,}60$$

por venderse 7 viviendas el valor total es,

$$D = 7 \times 420.265{,}60 = 2.941.859{,}20$$

Por tanto, resulta:

a) Valor total de los cobros de todas las ventas

$$A + B + C + D = 10.442.271{,}84$$

b) Saldo de la cuenta a favor de la empresa constructora

$$10.442.271{,}94 - 8.934.842{,}75 = 1.507.429{,}19.$$

N. 52

La sociedad X necesita adquirir unos equipos industriales para ampliar su producción, cuya vida útil se calcula en 10 años al cabo de los cuales se ha de proceder a su renovación. El coste de los equipos es de 20.000.000 de ptas. y su valor residual se estima en el 10 % de su coste.

Para financiar esta compra se obtiene el préstamo necesario con arreglo a las siguientes características:

– Tipo de interés anual el 7,5 %.

– Duración 10 años.

– Abono únicamente de intereses durante los dos primeros años y abono, durante los restantes, de la anualidad constante necesaria para extinguir la deuda.

Para las siguientes adquisiciones de equipos decide ingresar al final de cada semestre las cantidades necesarias en una cantidad que capitaliza al 6,5 % anual efectivo.

Determinar:

1) – Anualidades de amortización del préstamo.

2) – Semestralidades de la operación de constitución.

3) – Situación de las dos operaciones a los seis años y medio.

1) La operación de préstamo viene dada por el esquema:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
C_0 = 20.000.000 & I & I & a & a & \dots\dots\dots\dots & a & a \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots\dots\dots\dots & 9 & 10
\end{array}
$$

y en consecuencia:

– Durante los dos primeros años la anualidad es:

$$I = 20.000.000 \times 0{,}075 = 1.500.000$$

– Las sucesivas anualidades ascienden a:

$$a = 20.000.000\ \mathbf{a}^{-1}_{\overline{8}|0{,}075} = 3.414.540{,}40$$

2) La semestralidad constante X necesaria para cumplir los objetivos propuestos debe verificar la ecuación:

$$2\,X\,\mathbf{S}^{(2)}_{\overline{10}|0{,}065} = 20.000.000 - 2.000.000$$

y efectuando operaciones

$$X = \frac{18.000.000}{2 \cdot \mathbf{S}_{\overline{10}|0{,}065}} \quad \frac{j_{(2)}}{0{,}065} = 1.254.057{,}18$$

3) Los saldos de las dos operaciones una vez transcurridos seis años y medio ascienden a:

– Préstamo

$$C_{6+1/2} = 3.144.540{,}40\ \mathbf{a}_{\overline{4}|0{,}075}\,(1+0{,}075)^{\frac{6}{12}} = 11.857.522$$

– Operación de constitución

$$C^{+}_{6+1/2} = 2 \times 1.254.057{,}18\ \mathbf{S}^{(2)}_{\overline{6}|0{,}065}\,(1+0{,}065)^{\frac{6}{12}} +$$
$$+ 1.254.057{,}18 = 19.829.847{,}90$$

N. 53

Una Cofradía de Pescadores solicita al I.S.M. un préstamo de 51 millones de pesetas para ser amortizadas mediante anualidades constantes durante 15 años y a un tipo de interés anual del 5 %.

Los 51 millones de pesetas los ha obtenido el I.S.M. mediante un préstamo de la Caja de Ahorros X para amortizarse en las siguientes condiciones:

– Duración 15 años.
– Tipo de interés anual el 6 %
– Comisión anual del 0,5 % sobre el saldo.
– Amortización mediante cuotas de amortización constantes.

Obtener:

1) Cuadros de amortización de cada préstamo.

2) Coste actualizado que la operación supone para el I.S.M. tomando como tanto de valoración el 6,25 % anual.

1) El cuadro de amortización del préstamo concedido por el I.S.M. a la Cofradía de Pescadores se obtiene fácilmente sin más que tener presente que:

$$a_1 = 51.000.000\ a^{-1}_{\overline{15}|0,05} = 4.913.456,60;$$

$$I_1 = 51.000.000 \times 0,05 = 2.550.000$$

$$A_s = A_{s-1}\ (1 + 0,05) \text{ con } A_1 = a_1 - I_1 = 2.363.456,60$$

$$I_s = a_1 - A_s\ ;\ \mathcal{M}_s = \mathcal{M}_{s-1} + A_s\ ;\ C_s = C_0 - \mathcal{M}_s$$

y sus resultados son los que se recogen a continuación:

s	a_1	I_s	A_s	$\mathcal{M}_s$	C_s
0	–	–	–	–	51.000.000,00
1	4.913.456,6	2.550.000,00	2.363.456,60	2.363.456,60	48.636.543,40
2	4.913.456,6	2.431.827,17	2.481.629,43	4.845.086,03	46.154.913,97
3	4.913.456,6	2.307.745,68	2.605.710,92	7.450.796,95	43.549.203,05
4	4.913.456,6	2.177.460,10	2.735.996,50	10.186.793,45	40.813.206,55
5	4.913.456,6	2.040.660,30	2.872.796,30	13.059.589,75	37.940.410,25
6	4.913.456,6	1.897.020,30	3.016.436,30	16.076.026,05	34.923.973,95
7	4.913.456,6	1.746.198,65	3.167.257,95	19.243.284,00	31.756.716,00
8	4.913.456,6	1.587.835,55	3.325.621,05	22.568.905,05	28.431.094,95
9	4.913.456,6	1.421.554,75	3.491.901,85	26.060.806,90	24.939.193,10
10	4.913.456,6	1.246.959,63	3.666.496,97	29.727.303,87	21.272.696,13
11	4.913.456,6	1.063.634,80	3.849.821,80	33.577.125,67	17.422.874,33
12	4.913.456,6	871.143,69	4.042.312,91	37.619.438,59	13.380.561,42
13	4.913.456,6	669.027,89	4.244.428,71	41.863.867,29	9.136.132,71
14	4.913.456,6	456.806,48	4.456.650,12	46.320.517,41	4.679.482,59
15	4.913.456,6	233.974,01	4.679.482,59	51.000.000,00	0.000.000,00

El préstamo amortizable con cuotas constantes concedido por la Caja de Ahorros al I.S.M. da lugar al siguiente cuadro de amortización:

s	$a_s = I_s + A$	$C_s = C_{s-1}\,g$	I_s	A	$\mathcal{M}_s$	C_s
0	–	–	–	–	–	51.000.000
1	6.715.000	255.000	3.060.000	3.400.000	3.400.000	47.600.000
2	6.494.000	238.000	2.856.000	3.400.000	6.800.000	44.200.000
3	6.273.000	221.000	2.652.000	3.400.000	10.200.000	40.800.000
4	6.052.000	204.000	2.448.000	3.400.000	13.600.000	37.400.000
5	5.831.000	187.000	2.244.000	3.400.000	17.000.000	34.000.000
6	5.610.000	170.000	2.040.000	3.400.000	20.400.000	30.600.000
7	5.389.000	153.000	1.836.000	3.400.000	23.800.000	27.200.000
8	5.168.000	136.000	1.632.000	3.400.000	27.200.000	23.800.000
9	4.947.000	119.000	1.428.000	3.400.000	30.600.000	20.400.000
10	4.726.000	102.000	1.224.000	3.400.000	34.000.000	17.000.000
11	4.505.000	85.000	1.020.000	3.400.000	37.400.000	13.600.000
12	4.284.000	67.000	816.000	3.400.000	40.800.000	10.200.000
13	4.063.000	52.000	612.000	3.400.000	44.200.000	6.800.000
14	3.842.000	34.000	408.000	3.400.000	47.600.000	3.400.000
15	3.621.000	17.000	204.000	3.400.000	51.000.000	0.000.000

2) El coste actualizado de la doble operación para el I.S.M. viene dado por el valor actualizado al 6,25 % de los ingresos, que son las anualidades del primer préstamo, menos el valor actualizado de las anualidades del segundo préstamo que como puede observarse varían en progresión aritmética de razón –221.000. Por tanto se tiene:

$$\text{Coste} = 4.913.456{,}60\; a_{\overline{15|}\,0{,}0625} - A_{(6.715.000\,;\,-221.000)\;\overline{15|}\,0{,}0625} =$$

$$= 4.789.668{,}21$$

N. 54

Una sociedad dedicada a los transportes públicos se plantea la posibilidad de abrir una nueva línea cuyas características son:

1.– Se necesitan comprar 20 autobuses cuyo importe asciende a 2 millones de pesetas por unidad. Se estima que: la vida rentable es de 5 años al cabo de los cuales su valor residual asciende al 40 % de su coste; los gastos de mantenimiento y personal en el primer año son de 4 millones de pesetas con un incremento acumulativo en los siguientes años del 5 % anual.

2.– La financiación de la compra de autobuses se realiza mediante:

a) El 50 % con capital propio.

b) El 50 % mediante un préstamo de 5 años de duración amortizable por semestralidades constantes vencidas y a un tipo de interés del 8 % anual efectivo.

3.– Se calcula utilizarán la línea diariamente 1.000 usuarios durante los tres primeros años y 1.200 en los sucesivos.

4.– Los objetivos de la inversión son:

– Cubrir los costes de mantenimiento y personal.
– Atender a las reposiciones de los autobuses en su día destinando anualmente el fondo constante necesario que se capitalizará al 7 % anual.
– Permitir unos beneficios anuales del 15 % del capital propio.

5.– El estudio económico se realizará para un período de 10 años utilizándose para la valoración un tipo de interés del 9 % anual.

Determinar:

1) El precio constante que deberá abonar el usuario por trayecto.

2) Beneficio actualizado de la inversión.

Para resolver los apartados propuestos se procede como sigue:

1) Determinación del precio constante que deberá abonar el usuario por trayecto.

El precio P debe ser suficiente para cubrir los costes totales y proporcionar una renta de beneficios del 15 % del capital propio. Si se designan por $I(P)$ al valor de los ingresos actualizados, por C_T a los costes totales actualizados y por B al valor de la renta de beneficios debe verificarse:

$$B = I(P) - C_T$$

La determinación de cada componente es:

a.– Beneficios

$$B = 0{,}15 \times 20.000.000\ a_{\overline{10}|0{,}09} = 19.252.973{,}10$$

b.– Ingresos

Por ser diarias las recaudaciones deben utilizarse rentas continuas, luego:

$$I(P) = 1.000 \times 365\ P\ \bar{a}_{\overline{3}|0{,}09} + 1.200 \times 365\ P\ {}^{3/}\bar{a}_{\overline{7}|0{,}09} =$$
$$= 2.742.629{,}01\ P$$

c.– Costes totales.

Sus componentes son:

– Préstamo de 20.000.000 al 8 % y pagadero en 5 años mediante semestralidades constantes a_p cuyo valor se obtiene en la ecuación

$$20.000.000 = 2\ a_p\ a^{(2)}_{\overline{5}|0{,}08}$$

y es:

$$a_p = 10.000.000\ \frac{j_{(2)}}{0{,}08}\ a^{-1}_{\overline{5}|0{,}08} = 2.456.381{,}96.$$

El coste actualizado del préstamo será:

$$C_1 = 2 \times 2.456.381{,}96\ a^{(2)}_{\overline{5}|0{,}09} = 19.529.627{,}98$$

– Efectivo o dinero propio

$$C_2 = 20.000.000$$

– Fondo de reposición de autobuses, cuyo valor F debe ser suficiente para atender a las renovaciones por lo que se tiene:

$$F \cdot s_{\overline{5}|0,07} = 24.000.000$$

y efectuando operaciones

$$F = 4.173.376,67$$

El valor de la renta del fondo asciende a:

$$C_3 = 4.173.376,67 \; a_{\overline{10}|0,09} = 26.783.302,90$$

–Costes de mantenimiento y mano de obra

$$C_4 = A_{(4.000.000\,;\,1,05)\overline{10}|0,09} = 31.193.730$$

Los costes totales son:

$$C_T = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 97.506.660,88$$

La ecuación del beneficio queda de la forma:

$$19.252.973,10 = 2.742.629,01\,P = 97.506.660,88$$

y da como solución

$$P = 42,57$$

2) Beneficio actualizado de la inversión.

A cambio de un desembolso inicial de 20.000.000 de ptas. la inversión proporcionará unos ingresos anuales de 3.000.000 de ptas. (15 % de lo invertido) y al final de los 10 años hay disponibles 40 millones de pesetas (fondo de reposición más valores residuales).

El beneficio actualizado de la inversión es:

$$B_a = 3.000.000 \; a_{\overline{10}|0,09} + 40.000.000\,(1 + 0,09)^{-10} -$$

$$- 20.000.000 = 16.149.405,50$$

N. 55

Se plantea el estudio económico, para un periodo de 10 años, de una inversión que viene determinada por las siguientes características:

I.– INMOVILIZADO

Instalaciones	Coste inicial	Coste anual de mantenimiento	Vida útil	Valor residual
–Sector I	10.000.000	2.000.000	5 años	1.000.000
–Sector II	20.000.000	3.000.000	5 años	2.000.000
Planta	10.000.000		indefinida	8.000.000 (a los 10 años)

II.– COSTES VARIABLES:

a) Mano de obra: Durante el primer año ascenderán los salarios a 1.000.000 de ptas. mensuales y en los sucesivos se espera una revalorización media acumulativa del 15 % anual.

b) Materias primas: El coste del primer año será de 10 millones de ptas. y se espera un incremento acumulativo de sus precios del 8 % anual.

III.– PRODUCCION

Ascenderá a 50.000 unidades de producto anuales.

IV.– FINANCIACION

a) Instalaciones: La instalación inicial se financiará con un préstamo de 30 millones para ser amortizado en 5 años mediante anualidades constantes y a un tipo de interés del 9 % anual. Las sucesivas renovaciones se realizarán con préstamos de análogas características.

b) Planta: El 50 % con capital propio y la cantidad restante con un préstamo de 10 años de duración amortizable mediante semestralidades constantes a un rédito semestral del 4 %.

V.– OTRAS CARACTERISTICAS

El tipo de interés para evaluar el proyecto es del 10 % anual efectivo.

Se pide:

1) Repercusión media del inmovilizado en el precio de cada unidad producida.

2) El precio de venta de cada artículo producido en cada año sabiendo que sus componentes son:

- **Repercusiones de las instalaciones.**
- **Materias primas.**
- **Mano de obra.**
- **Un incremento del 20 % de las tres partidas indicadas para atender los beneficios de la empresa.**

3) Beneficio actualizado de la inversión.

1) Repercusión media del inmovilizado.

Si se representa por R a la repercusión media del inmovilizado en el precio de cada unidad producida se debe verificar que los ingresos $I(R)$, de esa componente del precio, actualizados sean iguales a los costes totales actualizados del inmovilizado.

La ecuación:

$$I(R) = C_I$$

con incógnita R obliga a determinar cada componente:

a.– Ingresos: Considerándolos como una renta fraccionada pospagable resulta:

$$I(R) = 50.000\, R\, a^{(12)}_{\overline{10}|0,10}$$

b.– Costes:

– Instalaciones: La primera instalación se realiza con un préstamo de 30 millones cuya anualidad de amortización es:

$$a_1 = 30.000.000\, a^{-1}_{\overline{5}|0,09} = 7.712.773,8$$

y la segunda con otro préstamo de sólo 27 millones, pues los tres restantes se cubren con los valores residuales, el importe de ésta ascendería a:

$$a_2 = 27.000.000\, a^{-1}_{\overline{5}|0,09} = 6.941.496,42$$

El coste actualizado de la instalación es:

$$C_I = 7.712.773,8\, a_{\overline{5}|0,10} + 6.941.496,42\ {}^{5/}a_{\overline{5}|0,10} -$$

$$- 3.000.000\, (1 + 0,1)^{-10} = 44.419.608,81$$

– Planta: Por financiarse el 50 % con un préstamo cuya semestralidad de amortización es

$$a_3 = 5.000.000\ a^{-1}_{\overline{20}|0,04} = 367.908,75$$

de otro 50 % con medios propios y estimarse su valor al cabo de los 10 años en 8 millones el coste de la depreciación será:

$$C_p = 5.000.000 + 2 \times 367.908,75\ a^{(2)}_{\overline{10}|0,10} -$$

$$- 8.000.000\ (1 + 0,10)^{-10} = 6.449.437,19$$

– Coste total del inmovilizado.

$$C_I = C_i + C_p = 50.869.046$$

c.– Cálculo de R: La ecuación

$$50.000\ R\ a^{(12)}_{\overline{10}|0,10} = 50.869,046$$

da como solución

$$R = \frac{50.869.046}{50.000} \quad \frac{j_{(12)}}{0,10}\ a^{-1}_{\overline{10}|0,10} = 158,774$$

2) Precio de venta

Si se hace la hipótesis de rentas pospagables mensuales en los costes de la mano de obra y materias primas, el tipo de interés no influirá en la determinación del precio en cada uno de los años. En la tabla siguiente se indican cada una de las componentes y el precio en cada uno de los años.

AÑOS	MANO DE OBRA		MATERIAS PRIMAS		PRECIO DEL PRODUCTO		DIFERENCIA
	COSTE ANUAL	REPERCUSION POR UNIDAD PRODUCIDA	COSTE ANUAL	REPERCUSION POR UNIDAD PRODUCIDA	PRECIO DE COSTE	PRECIO DE VENTA	
r		m_r		s_r	$p_r = m_r + s_r + R$	$P_r = 1{,}20\, p_r$	$P_r - p_r$
1	12.000.000,00	240,00	10.000.000,00	200,00	598,77	718,52	119,75
2	13.800.000,00	276,00	10.800.000,00	216,00	650,77	780,92	130,15
3	15.870.000,00	317,40	11.664.000,00	233,28	709,45	851,34	141,89
4	18.250.500,00	365,01	12.597.120,00	251,44	775,72	930,86	155,14
5	20.988.075,00	419,76	13.604.889,60	272,10	850,63	1.020,76	170,13
6	24.136.286,25	482,73	14.693.280,76	293,87	935,37	1.122,44	187,07
7	27.756.729,18	555,13	15.868.743,22	317,37	1.031,27	1.237,52	206,25
8	31.920.238,55	638,40	17.138.242,67	342,76	1.139,93	1.367,92	227,99
9	36.708.274,33	734,17	18.509.302,08	370,19	1.263,13	1.515,76	252,63
10	42.214.515,47	844,29	19.990.046,24	399,80	1.402,86	1.683,43	280,57

3) Beneficio actualizado

Para obtener el beneficio basta actualizar las corrientes que se producirán en cada artículo, (las diferencias $P_r - p_r$ del cuadro anterior) de los que hay que fabricar. O sea:

$$B = \sum_{r=1}^{10} (P_r - p_r)\, 50.000 \frac{0{,}10}{j_{(12)}} (1 + 0{,}10)^{-r} = 53.910.482{,}06$$